

UNIVERSITY OF ROCHESTER LIBRARIES



3 9087 00070725 9

QA
431
N762

THE UNIVERSITY
OF ROCHESTER
LIBRARY



LEÇONS

SUR LES

ÉQUATIONS LINÉAIRES

AUX DIFFÉRENCES FINIES

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}

82544-28 — Quai des Grands-Augustins, 55.

295696

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL

LEÇONS

SUR LES

ÉQUATIONS LINÉAIRES

AUX DIFFÉRENCES FINIES

PAR

Niels Erik
N.-E. NÖRLUND

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE COPENHAGUE,
MEMBRE CORRESPONDANT DE L'INSTITUT DE FRANCE.

RÉDIGÉES PAR

René LAGRANGE

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE DIJON.



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS

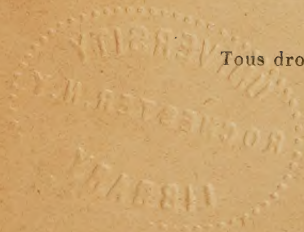
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1929



Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.



QA
431
NT662

PRÉFACE

La théorie des équations aux différences finies remonte à Lagrange et Laplace, mais ce n'est que tout récemment que l'étude des solutions de ces équations a été développée avec quelques détails. Les recherches modernes sur ce sujet ont été inaugurées par Henri Poincaré et Salvatore Pincherle. On doit à Henri Poincaré un théorème remarquable sur la manière dont se comportent les solutions d'une équation linéaire et homogène aux différences finies pour les valeurs très grandes de la variable. Ce théorème a été le point de départ de plusieurs recherches. Rappelons en particulier la généralisation que Salvatore Pincherle a donnée du concept de la fraction continue. Dans ces dernières années la théorie des équations aux différences finies a été abordée par un grand nombre d'auteurs, parmi lesquels il convient de citer G. D. Birkhoff, H. Galbrun, E. Hilb, E. Bortolotti, O. Perron, R. D. Carmichael, J. Horn, K. P. Williams, A. Guldberg et G. Wallenberg. Le sujet est trop vaste pour qu'il soit possible de donner ici un exposé de tous les résultats obtenus. Le but de ce livre est de mettre en évidence les propriétés essentielles des solutions des équations linéaires et homogènes, d'une part à l'aide de leurs développements en séries de facultés, d'autre part à l'aide de certaines méthodes d'approximations successives dues à G. D. Birkhoff, et R. D. Carmichael. Les Chapitres I-IV sont consacrés à une équation linéaire en faisant différentes hypothèses relativement aux coefficients, et les Chapitres V et VI à un système d'équations linéaires.


La rédaction de ce volume est due à M. René Lagrange,

actuellement maître de conférences à la Faculté des Sciences de Lille. Je tiens à exprimer à M. René Lagrange mes sentiments de vive reconnaissance pour sa collaboration et pour les soins qu'il a apportés à la rédaction.

J'adresse aussi mes remerciements à M. Borel, qui m'a fait l'honneur d'accueillir cet Ouvrage dans la Collection qu'il dirige, et à la maison Gauthier-Villars et C^{ie} qui en assure l'édition.

N.-E. NÖRLUND.

Copenhague, novembre 1926.



LEÇONS

SUR LES

ÉQUATIONS LINÉAIRES

AUX DIFFÉRENCES FINIES

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

I. — EXISTENCE DES SOLUTIONS.

1. On appelle « équation linéaire et homogène aux différences finies d'ordre n » une équation de la forme

$$(1) \quad \sum_{i=0}^n p_i(x) u(x+i) = 0,$$

$u(x)$ désignant la fonction inconnue, et les coefficients $p_i(x)$ étant des fonctions données. Cette dénomination résulte de ce que ce premier membre est une forme linéaire des différences de $u(x)$, d'ordre inférieur ou égal à n .

Les différences d'écart ω d'une fonction $u(x)$ étant définies par

$$\Delta_{\omega} u(x) = \frac{u(x+\omega) - u(x)}{\omega},$$

et la formule de récurrence (1)

$$\Delta_{\omega}^i u(x) = \Delta_{\omega} \Delta_{\omega}^{i-1} u(x),$$

(1) On écrit Δ_{ω} pour Δ_{ω}^1 ; on écrit également Δ pour Δ_1 .

on sait en effet que l'on a les identités réciproques

$$\omega^i \Delta_{\omega}^i u(x) = \sum_{s=0}^i (-1)^{i-s} \binom{i}{s} u(x + s\omega),$$

$$u(x + i\omega) = \sum_{s=0}^i \binom{i}{s} \omega^s \Delta_{\omega}^s u(x).$$

En particulier (1), suivant qu'on utilise les formules

$$(2) \quad u(x + i) = \sum_{s=0}^i \binom{i}{s} \Delta^s u(x)$$

ou

$$(2') \quad u(x + i) = u[x + n - (n - i)] = \sum_{s=0}^{n-i} \binom{n-i}{s} (-1)^s \Delta_{-1}^s u(x + n),$$

on voit que (1) prend la forme

$$(3) \quad \sum_{i=0}^n P_i(x) \Delta^i u(x) = 0$$

ou

$$(3') \quad \sum_{i=0}^n Q_i(x) \Delta_{-1}^i u(x) = 0.$$

Les $P_i(x)$ et $Q_i(x + n)$ sont des fonctions linéaires des $p_i(x)$, savoir

$$(4) \quad P_i(x) = \sum_{s=i}^n \binom{s}{i} p_s(x),$$

$$(4') \quad Q_i(x + n) = (-1)^i \sum_{s=i}^n \binom{s}{i} p_{n-s}(x).$$

En particulier, on a

$$P_n(x) = p_n(x), \quad Q_n(x + n) = (-1)^n p_0(x).$$

Les formes (3) et (3') sont parfois avantageuses, et mettent en évidence les analogies de l'équation aux différences avec les équations

(1) Le fait de considérer une équation aux différences d'écart 1 ne restreint évidemment pas la généralité de la question.

différentielles. Cependant, à cause de sa forme récurrente, l'expression (1) est souvent préférable.

Supposons que, dans cette équation, x soit une variable complexe, et les $p_i(x)$ des fonctions analytiques de x . Soient $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ les points singuliers de ces coefficients (1). L'existence d'une solution de (1) est évidente. Donnons-nous, comme conditions initiales, les valeurs de $u(x)$ dans une bande $c \leq \sigma < c + n$, où l'on a posé $x = \sigma + i\tau$. (1) permet d'en déduire les valeurs de $u(x)$ pour $c - 1 \leq \sigma < c$, pourvu que x ne soit ni un β_s , ni un zéro de $p_0(x)$. On peut de même déterminer les valeurs de $u(x)$ dans la bande $c - 2 \leq \sigma < c - 1$, pourvu que x et $x + 1$ ne soient ni un β_s , ni un zéro de $p_0(x)$. En désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ les zéros de $p_0(x)$, on voit que, de proche en proche, on pourra prolonger $u(x)$ en tous les points du demi-plan $\sigma < c$, autres que les $\alpha_s - \nu$ et $\beta_s - \nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$). Pour prolonger $u(x)$ à droite de la bande initiale, on écrira (1) sous la forme

$$\sum_{i=0}^n p_{n-i}(x-n) u(x-i) = 0;$$

si l'on désigne par $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ les zéros de $p_n(x-n)$, on voit donc que (1) permet ce prolongement en tous les points du plan $\sigma > c + n$, autres que les $\beta_s + n + \nu$ et $\gamma_s + \nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$).

Nous désignerons par $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ les ensembles de points (2)

$$\alpha_s - \nu, \quad \beta_s - \nu \quad \text{et} \quad \beta_s + n + \nu, \quad \gamma_s + \nu \\ (s = 1, 2, 3, \dots; \nu = 0, 1, 2, \dots),$$

et, pour abréger, nous appellerons points singuliers de l'équation aux différences les points $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$ ($s = 1, 2, 3, \dots$); il faut y ajouter encore, s'il y a lieu, le point à l'infini.

On voit de suite que, si l'on désigne par $\pi_i(x)$ la fonction périodique, de période 1, prenant les valeurs données à $u(x)$ dans la

(1) On suppose que ces points sont des points singuliers essentiels, les pôles pouvant toujours être supprimés en multipliant l'équation (1) par une fonction entière convenable.

On suppose également que les $p_i(x)$ n'ont aucun facteur commun.

(2) Sauf avis contraire, nous désignerons respectivement par $a + \nu, a - \nu, a \pm \nu$ les ensembles de points $a, a + 1, a + 2, \dots; a, a - 1, a - 2, \dots; a, a \pm 1, a \pm 2, \dots$ sans qu'il soit besoin de rappeler que $\nu = 0, 1, 2, \dots$.

bande $c + i - 1 \leq \sigma < c + i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), le calcul précédent fournit, pour l'expression de $u(x)$ en un point quelconque du plan, une forme linéaire de ces n fonctions périodiques

$$(5) \quad u(x) = u_1(x) \pi_1(x) + u_2(x) \pi_2(x) + \dots + u_n(x) \pi_n(x).$$

Les $u_k(x)$ sont des solutions particulières de (1); c'est ainsi que $u_k(x)$ est la solution qui est nulle dans les bandes $c \leq \sigma < c + k - 1$, $c + k \leq \sigma < c + n$, et égale à 1 dans la bande $c + k - 1 \leq \sigma < c + k$. Ces solutions particulières sont donc des fonctions discontinues, formées d'une infinité de fonctions rationnelles des $p_i(x \pm \nu)$, les lignes de discontinuité, hors de la bande initiale, étant les droites $\sigma = c - \nu$, $\sigma = c + n + \nu$. (5) montre enfin que, d'une manière générale, il n'existe pas de solution analytique satisfaisant à des conditions initiales données arbitrairement (c'est-à-dire, coïncidant, dans une bande $c \leq \sigma < c + n$, avec une fonction donnée).

2. Systèmes fondamentaux. — Nous dirons que n solutions $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ de l'équation (1) forment un système fondamental de solutions s'il n'existe aucune relation linéaire de la forme

$$\sum_{i=1}^n \pi_i(x) u_i(x) = 0,$$

où les $\pi_i(x)$ sont des fonctions périodiques [$\pi_i(x + 1) = \pi_i(x)$] telles qu'il existe une valeur au moins de x , non congruente à un point singulier de l'équation, pour laquelle elles sont finies et non simultanément nulles.

Il résulte tout d'abord de cette définition qu'une solution $u_i(x)$ appartenant à un système fondamental ne peut s'annuler en n points consécutifs $a, a + 1, \dots, a + n - 1$, a désignant un point non congruent à un des points singuliers de (1); dans ce cas, en effet, $u_i(x)$ s'annulerait en tous les points $a \pm \nu$, et l'on aurait, contrairement à la définition,

$$\pi_i(x) u_i(x) = 0,$$

$\pi_i(x)$ étant une fonction périodique nulle en tout point autre que les $a \pm s$.

Voici une autre définition, équivalente, mais parfois plus commode, d'un système fondamental de solutions. Considérons le déterminant

$$D(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1(x+1) & u_2(x+1) & \dots & u_n(x+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1(x+n-1) & u_2(x+n-1) & \dots & u_n(x+n-1) \end{vmatrix}.$$

Si les $u_i(x)$ sont solutions de (1), on vérifie immédiatement que $D(x)$ satisfait à l'équation aux différences finies

$$(6) \quad D(x+1) = (-1)^n \frac{p_0(x)}{p_n(x)} D(x),$$

de sorte que, si α est un point non congruent à un point singulier de (1), $D(x)$ est, simultanément, nul ou non nul, en tous les points $\alpha \pm \nu$. Ceci posé, nous allons démontrer que :

Pour que n solutions $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ forment un système fondamental, il faut et il suffit que le déterminant $D(x)$ ne s'annule pour aucune valeur α de x , non congruente à un point singulier de l'équation.

Cette condition est bien suffisante, car une relation linéaire

$$\sum_{i=1}^n \pi_i(\alpha) u_i(\alpha - \nu) = 0,$$

à coefficients non tous nuls, annulerait $D(\alpha)$. Réciproquement, supposons que $D(x)$ s'annule pour une valeur α de x . On pourrait déterminer n quantités non toutes nulles, $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$, ..., $\varphi_n(\alpha)$, telles que

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(\alpha) u_i(\alpha + s) = 0 \quad (s = 0, 1, \dots, n-1);$$

il résulterait ensuite de (1) que cette relation serait vraie quel que soit l'entier s , de sorte qu'en prenant les $\pi_i(x)$ égaux à $\varphi_i(\alpha)$ aux points $\alpha \pm \nu$, et nuls ailleurs, on formerait, entre les n solutions $u_i(x)$, une relation linéaire exprimant qu'elles ne constituent pas un système fondamental.

Remarquons d'ailleurs que, en vertu de (6), il faut et il suffit

que $D(x)$ ne s'annule pour aucun point a d'une bande $c \leq \sigma < c + 1$.

Il est bon d'insister sur le fait qu'il ne suffit pas que $D(x)$ ne soit pas identiquement nul. C'est ainsi que, pour l'équation à coefficients constants

$$u(x+2) - (a_1 + a_2)u(x+1) + a_1 a_2 u(x) = 0,$$

où $a_1 = a_2$, a_1^x et a_2^x forment un système fondamental de solutions, mais il n'en est pas de même pour a_1^x et $a_2^x \sin 2\pi x$, ni pour a_1^x et $a_1^x - a_2^x \sin 2\pi x$, dont les déterminants $D(x)$ s'annulent pour les valeurs entières de x .

3. La détermination de n solutions fondamentales suffit pour résoudre entièrement l'équation (1). Soient $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ n solutions de cette nature, et $u(x)$ une solution quelconque. En écrivant que (1) est vérifiée par ces $n+1$ fonctions, et éliminant les $p_i(x)$ entre les $n+1$ équations écrites, on voit de suite que

$$\begin{vmatrix} u(x) & u_1(x) & \dots & u_n(x) \\ u(x+1) & u_1(x+1) & \dots & u_n(x+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(x+n) & u_1(x+n) & \dots & u_n(x+n) \end{vmatrix} = 0.$$

en tout point a non congruent à un point singulier ⁽¹⁾. Il existe donc une relation linéaire à coefficients périodiques de période 1

$$\pi(x)u(x) + \pi_1(x)u_1(x) + \dots + \pi_n(x)u_n(x) = 0,$$

$\pi(x)$ n'étant nulle en aucun point a , parce que les $u_i(x)$ forment un système fondamental.

Si l'on observe que, réciproquement, toute expression de la forme

$$(7) \quad u(x) = \sum_{i=1}^n \pi_i(x) u_i(x)$$

est solution de (1), on voit que la solution générale de (1) est donnée par (7).

Les coefficients périodiques $\pi_i(x)$, relatifs à une solution $u(x)$ égale à une fonction donnée $\varphi(x)$ dans une bande $c \leq \sigma < c + n$, sont

⁽¹⁾ On remarquera que cette méthode permet de former une équation aux différences admettant comme solutions n fonctions données linéairement indépendantes.

déterminés par les n équations de déterminant non nul

$$\sum_{i=1}^n \pi_i(x) u_i(x+s) = \varphi(x+s) \quad (s = 0, 1, \dots, n-1; c \leq \sigma < c+1).$$

On voit que ces fonctions $\pi_i(x)$ sont en général discontinues le long des droites $\sigma = c \pm \nu$.

Soient $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ et $\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x), \dots, \bar{u}_n(x)$ deux systèmes fondamentaux de solutions. On a

$$(8) \quad \bar{u}_i(x) = \sum_{s=1}^n \pi_{is}(x) u_s(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

les $\pi_{is}(x)$ étant des fonctions périodiques de période 1, dont le déterminant $|\pi_{is}(x)|$ ne s'annule en aucun point non congruent à un point singulier de l'équation. Cette dernière propriété résulte de ce que, d'après (8), les déterminants $D(x)$ et $\bar{D}(x)$ de ces deux systèmes fondamentaux vérifient l'identité

$$\bar{D}(x) = D(x) |\pi_{is}(x)|.$$

Inversement, si $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ est un système fondamental, il en est de même pour les fonctions $\bar{u}_i(x)$ définies par (8), si le déterminant des fonctions périodiques $\pi_{is}(x)$ ne s'annule en aucun point non congruent à un point singulier.

4. Formation d'un système fondamental de solutions analytiques. —

Considérons un domaine fini quelconque, limité par exemple par un cercle C de rayon très grand. Isolons par des petits cercles les points des ensembles $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ intérieurs à C . En outre, si certains des β_s sont des points critiques, traçons les coupures rectilignes, parallèles à l'axe réel, de β_s à $-\infty$ et de $\beta_s + n$ à $+\infty$. On forme ainsi, en général, un ou plusieurs domaines connexes limités par C , les petits cercles et les coupures, s'il y en a. Supposons qu'il existe au moins un pareil domaine, soit Γ .

$f(x)$ désignant une fonction, arbitraire pour l'instant, cherchons une suite de fonctions $\dots R_{-2}(x), R_{-1}(x), R_0(x), R_1(x), \dots$ telles

la suivante en ajoutant les trois premières équations (12), multipliées respectivement par $p_2(x)$, $p_1(x+1)$, $p_0(x+2)$, et tenant compte des deux premières équations (13). On vérifie, par récurrence, les $n+1$ premières équations (13), la $(\nu+1)^{\text{ème}}$ d'entre elles ($0 \leq \nu \leq n$) s'obtenant en ajoutant les $\nu+1$ premières équations (12) multipliées respectivement par $p_\nu(x)$, $p_{\nu-1}(x+1)$, ..., $p_0(x+\nu)$. Pour une valeur quelconque de ν , les équations (12) commençant par un terme en $R_\nu(x)$, $R_{\nu-1}(x)$, ..., $R_{\nu-n}(x)$, multipliées respectivement par $p_0(x+\nu)$, $p_1(x+\nu-1)$, ..., $p_n(x+\nu-n)$, et ajoutées ensemble, donnent, en posant

$$\varphi(\nu, x) = \sum_{s=0}^n p_s(x+\nu-s) R_{\nu-s}(x),$$

$$(14) \quad p_0(x)\varphi(\nu, x) + p_1(x)\varphi(\nu-1, x+1) + \dots + p_n(x)\varphi(\nu-n, x+n) = 0.$$

Ayant vérifié que

$$\varphi(1, x) = \varphi(2, x) = \dots = \varphi(n, x) = 0,$$

on déduit de (14), par récurrence, que les $\varphi(\nu, x)$ sont nuls quel que soit l'entier positif ou négatif ν .

Si l'on écrit séparément les équations (13), relatives aux valeurs non positives de ν ,

$$(13') \quad \begin{cases} p_n(x-n) R_{-n}(x) = 1, \\ p_n(x-n-1) R_{-n-1}(x) + p_{n-1}(x-n) R_{-n}(x) = 0, \\ p_n(x-n-2) R_{-n-2}(x) + p_{n-1}(x-n-1) R_{-n-1}(x) + p_{n-2}(x-n) R_{-n}(x) = 0, \\ \dots, \\ p_n(x+\nu) R_\nu(x) + p_{n-1}(x+\nu-1) R_{\nu+1}(x) + \dots + p_0(x+\nu+n) R_{\nu+n}(x) = 0, \end{cases}$$

on se rend compte immédiatement, d'après les équations (13) et (13'), que les $R_\nu(x)$ sont des fonctions rationnelles des $p_i(x \pm s)$.

5. Il nous reste à choisir $f(x)$ de façon que la série (9) soit convergente. Pour cela, faisons une hypothèse supplémentaire sur la manière dont les coefficients de (1) se comportent à l'infini. Supposons qu'on sache trouver un nombre $M > 1$ et un entier $p \leq 0$ tels que, quel que soit x dans Γ et quel que soit l'entier positif ν , on ait

$$(15) \quad \left| \frac{p_i(x+\nu)}{p_0(x+\nu+i)} \right| < M e^{\nu^p}, \quad \left| \frac{p_{n-i}(x-\nu)}{p_n(x-\nu-i)} \right| < M e^{\nu^p} \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

C'est par exemple toujours possible si les fonctions $|p_i(x)|$ ne croissent ni ne décroissent plus vite qu'une fonction entière d'ordre fini, quand x tend vers l'infini le long d'une droite parallèle à l'axe réel.

Avec ces hypothèses, on démontre que l'on a, dans Γ ,

$$(16) \quad |R_{\pm s}(x)| < n^s M^s e^{[s-1]p} \quad (s = 1, 2, 3, \dots),$$

où l'on a posé

$$[s]^p = 1^p + 2^p + \dots + s^p.$$

En effet, on peut écrire une inégalité de cette forme pour $s = 1$, et, en la supposant vraie pour les valeurs $1, 2, \dots, \nu - 1$ de s ($\nu > 0$), l'équation générale du système (13) donne

$$\begin{aligned} |R_\nu(x)| &< n^{\nu-1} M^\nu e^{[\nu-1]p} + n^{\nu-2} M^{\nu-1} e^{[\nu-2]p} + \dots + n^{\nu-n} M^{\nu-n+1} e^{[\nu-n]p} \\ &< n^\nu M^\nu e^{[\nu-1]p}, \end{aligned}$$

ce qui démontre (16) pour $R_{+s}(x)$. Grâce aux secondes inégalités (15) et aux équations (13'), on démontrerait de même que (16) est vraie pour $R_{-s}(x)$.

En remarquant que, pour $s > 1$,

$$[s]^p < s^{p+1},$$

on voit qu'on obtient une série (9) absolument et uniformément convergente dans Γ en prenant

$$f(x) = e^{-x^2(p+1)}.$$

Chaque terme de cette série uniformément convergente étant une fonction analytique holomorphe dans Γ , sa somme est elle-même holomorphe dans Γ .

On démontre ainsi, avec ces hypothèses générales, l'existence d'une solution de (1) holomorphe dans Γ ; nous savons même former une telle solution.

Pour démontrer maintenant l'existence d'un système fondamental de solutions de (1), prenons

$$f_i(x) = \frac{\sin \pi(x - a - i + 1)}{\pi(x - a - i + 1)} e^{-(x-a-i+1)^2(p+1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où a est un point quelconque non congruent à un point singulier.

de (1). Formons les séries correspondantes

$$(17) \quad u_i(x) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} R_v(x) f_i(x+v),$$

et calculons la valeur du déterminant $D(x)$ de ces n fonctions au point α . Il résulte du choix des $f_i(x)$ que

$$u_i(\alpha + s) = R_{i-1-s}(\alpha + s);$$

donc, en se rappelant les équations (11),

$$\begin{aligned} u_i(\alpha + i - 1) &= R_0(\alpha + i - 1), \\ u_i(\alpha + i) &= u_i(\alpha + i + 1) = \dots = u_i(\alpha + n - 1) = 0; \end{aligned}$$

on voit alors que le déterminant $D(x)$ se réduit au produit des éléments de sa diagonale principale

$$R_0(\alpha) R_0(\alpha + 1) \dots R_0(\alpha + n - 1) = \frac{(-1)^n}{p_0(\alpha) p_0(\alpha + 1) \dots p_0(\alpha + n - 1)},$$

qui n'est pas nul. $D(x)$ étant une fonction analytique de x , holomorphe dans Γ , ne peut donc admettre au plus qu'un nombre fini de zéros dans ce domaine.

Si $D(x)$ ne s'annule pas dans Γ , les $u_i(x)$ forment un système fondamental. Sinon, soit ε un de ses zéros. Il existe n constantes $\varphi_1(\varepsilon)$, $\varphi_2(\varepsilon)$, \dots , $\varphi_n(\varepsilon)$, non toutes nulles, telles que la fonction

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(\varepsilon) u_i(x)$$

s'annule aux points $\varepsilon \pm s$. Si $\varphi_m(\varepsilon)$ est la dernière de ces constantes qui ne soit pas nulle, remplaçons les $u_i(x)$ par les

$$u_i^{(1)}(x) = u_i(x) \quad (i \neq m), \quad u_m^{(1)}(x) = \frac{\sum_{i=1}^m \varphi_i(\varepsilon) u_i(x)}{\sin 2\pi(x - \varepsilon)}.$$

Ces solutions sont, comme les $u_i(x)$, holomorphes dans Γ , y compris ε , et leur déterminant

$$D^{(1)}(x) = \frac{\varphi_m(\varepsilon)}{\sin 2\pi(x - \varepsilon)} D(x);$$

$\varphi_m(\varepsilon)$ n'étant pas nul, $D^{(1)}(x)$ a les mêmes zéros que $D(x)$, avec les mêmes ordres de multiplicité, sauf pour ε dont l'ordre est abaissé d'une unité. En répétant cette opération autant de fois qu'il sera nécessaire, pour ε , puis, s'il y a lieu, pour les autres zéros de $D(x)$, on arrive ainsi, finalement, après un nombre fini d'opérations, à n fonctions formant un système fondamental.

En résumé, on peut choisir convenablement les n fonctions $f_i(x)$ de façon que les séries (17) représentent un système fondamental de solutions, holomorphes dans Γ . Ces solutions admettent, en général, comme points singuliers, les points des ensembles (β) , (α) et (γ) , et des ensembles dérivés: il faut y ajouter, s'il y a lieu, le point à l'infini.

Les points des ensembles (α) et (γ) sont des pôles ⁽¹⁾; les autres points singuliers de nos solutions sont en général essentiels. Bornons-nous, pour l'instant, à une remarque relative aux premiers points.

6. Les racines α_s de $p_0(x) = 0$ se répartissent en différents groupes, chaque groupe étant formé des racines congruentes à l'une d'elles. Soit $\alpha_p, \alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \dots$ un tel groupe de racines, d'ordres de multiplicité n_0, n_1, n_2, \dots ; on peut évidemment les supposer numérotées de façon que

$$\mathcal{R}(\alpha_p) > \mathcal{R}(\alpha_{p+1}) > \mathcal{R}(\alpha_{p+2}) > \dots$$

Il résulte du calcul des $R_\gamma(x)$ ($\gamma > 0$) à partir de (13) que nos solutions, généralement holomorphes ⁽²⁾ aux points $\alpha_p + 1, \alpha_p + 2, \dots, \alpha_p + n$, admettent les points

$$\alpha_p, \alpha_p - 1, \dots, \alpha_p - n + 1$$

comme pôles d'ordre n_0 au plus, et, d'une manière générale, les points

$$\alpha_{p+r}, \alpha_{p+r} - 1, \dots, \alpha_{p+r+1} + 1$$

comme pôles d'ordre $n_0 + n_1 + \dots + n_r$ au plus.

(1) Ceci apparaît immédiatement sur les expressions des $R_\gamma(x)$ données par les équations (13) et (13').

(2) Si certains des $\alpha_p + 1, \alpha_p + 2, \dots, \alpha_p + n$ étaient en même temps des γ_i , les singularités provenant de ce fait ne se trouveraient que dans les $R_\gamma(x)$ d'indice négatif, ce qui ne modifierait pas la conclusion.

Les racines γ_s se répartissent de même en différents groupes. Si $\gamma_p, \gamma_{p+1}, \gamma_{p+2}, \dots$ est un tel groupe, avec

$$\mathcal{R}(\gamma_p) < \mathcal{R}(\gamma_{p+1}) < \mathcal{R}(\gamma_{p+2}) < \dots,$$

et si m_r est l'ordre de multiplicité de γ_{p+r} , les expressions des $R_\nu(x)$ ($\nu \leq -n$) montrent de même que nos solutions admettent

$$\gamma_p, \gamma_{p+1}, \dots, \gamma_{p+1}-1$$

comme pôles d'ordre m_0 au plus, et, d'une manière générale, les points

$$\gamma_{p+r}, \gamma_{p+r}+1, \dots, \gamma_{p+r+1}-1$$

comme pôles d'ordre $m_0 + m_1 + \dots + m_r$ au plus. En particulier, si un groupe des α_s ou des γ_s ne contient qu'un nombre fini de racines, l'ordre de multiplicité des pôles correspondants reste borné.

Les points des ensembles dérivés de (α) et (γ) , étant des points limites de pôles, sont des points singuliers essentiels de nos solutions.

Si les $p_i(x)$ sont des polynômes en x , les seuls points singuliers appartiennent aux ensembles (α) et (γ) . Donc l'équation aux différences (1) à coefficients rationnels admet un système fondamental de solutions méromorphes.

Plus généralement, si les $p_i(x)$ sont uniformes, il en est de même pour nos solutions. Cette remarque montre, à elle seule, la différence profonde qu'il y a entre les équations différentielles et les équations aux différences finies. Pour ces dernières, les singularités des solutions sont dispersées dans tout le plan; mais pour une équation différentielle, considérée comme cas limite d'une équation aux différences d'écart infiniment petit, ces singularités se contractent et forment des points critiques.

7. Si l'on se borne aux valeurs réelles de x , on peut supprimer les hypothèses (15) sur la croissance et la décroissance des $p_i(x)$. En particulier, on a le théorème suivant :

Si les coefficients de l'équation (1) sont finis et continus, et si les coefficients extrêmes $p_0(x)$ et $p_n(x)$ ne s'annulent pour aucune valeur finie de x , il existe un système fondamental de solutions qui sont des fonctions continues de x dans tout intervalle fini Γ .

Ces solutions se représentent par des séries de la forme (17) uniformément convergentes dans l'intervalle Γ .

Une telle équation n'admet aucun point singulier à distance finie. Soit alors Γ un intervalle fini quelconque, et soit M_ν ($\nu > 0$) le maximum de $|R_\nu(x)|$ et $|R_{-\nu}(x)|$ dans Γ . Désignons enfin par N un entier positif supérieur à tout nombre de Γ . Prenons alors, dans la série (9),

$$f(x) = e^{-F(x^2)},$$

$F(x)$ désignant une fonction entière, positive et toujours croissante pour les valeurs positives de x . On a

$$\left| \sum_{\nu=N}^{\infty} R_\nu(x) f(x+\nu) \right| < \sum_{\nu=N}^{\infty} M_\nu e^{-F[(\nu-N)^2]},$$

$$\left| \sum_{\nu=N}^{\infty} R_{-\nu}(x) f(x-\nu) \right| < \sum_{\nu=N}^{\infty} M_\nu e^{-F[(\nu-N)^2]}.$$

Or, quelque vite que croissent les nombres $M_1, M_2, \dots, M_\nu, \dots$ quand ν augmente indéfiniment, on peut, en vertu d'un théorème de Poincaré⁽¹⁾, choisir la fonction entière $F(x)$ de façon que la série au second membre de ces inégalités soit convergente. On en conclut qu'on peut déterminer n fonctions $f_i(x)$ de sorte que les séries (17) convergent uniformément dans l'intervalle Γ , ce qui démontre le théorème énoncé.

II. — ÉQUATION ADJOINTE ⁽²⁾.

8. Désignons le premier membre de l'équation (1) par

$$P(u(x)) \equiv \sum_{s=0}^n P_s(x) u(x+s),$$

⁽¹⁾ *American Journal of Mathematics*, t. XIV, p. 214. Une démonstration très simple de ce théorème a été donnée par E. Borel, dans ses *Leçons sur les séries à termes positifs*, p. 27 (Paris, 1902).

⁽²⁾ S. PINCHERLE et U. AMALDI, *Le Operazioni distributive et le loro applicazioni all'Analisi*, p. 242-246 (Bologna, 1901). — E. BORTOLOTTI, *Rom. Acc. L. Rend.*, 5^e série, t. 5, 1896, p. 254-261 et 349-356. — G. WALLENBERG et A. GULDBERG, *Theorie der linearen Differenzengleichungen*, p. 78-86 (Leipzig, 1911).

et proposons-nous de déterminer une fonction $\varpi(x)$ telle que $\varpi(x)P(u(x))$ soit la différence d'une fonction linéaire en $u(x)$, $u(x+1)$, \dots , $u(x+n-1)$

$$Q(u(x)) = q_0(x)u(x) + q_1(x)u(x+1) + \dots + q_{n-1}(x)u(x+n-1).$$

Nous devons donc avoir identiquement

$$(18) \quad \omega(x) P(u(x)) = \Delta Q(u(x)).$$

L'identification des coefficients de $u(x+i)$ ($i=0, 1, \dots, n$) dans les deux membres donne, entre les $p_i(x)$ et les $q_s(x)$, les relations

[illegible]

L'élimination des $q_s(x)$ entre ces n équations fournit, pour $w(x)$, l'équation aux différences

$$(20) \quad \sum_{s=0}^n p_s(x-s) w(x-s) = 0,$$

On appelle cette équation l'équation adjointe de $P(u(x)) = 0$, et l'on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que $\varpi(x) P(u(x))$ soit la différence d'une forme linéaire des $u(x \pm s)$, est que $\varpi(x)$ soit solution de l'équation adjointe. L'expression

$$\bar{P}(u(x)) \equiv \sum_{s=0}^n p_s(x-s) u(x-s)$$

est dite *adjointe* à $P(u(x))$.

Il y a réciprocité entre l'équation (1) et son adjointe. En effet, pour que $w(x)\bar{P}(u(x))$ soit la différence d'une forme linéaire des $u(x \pm s)$, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi pour

$$\omega(x+n) \sum_{s=0}^n p_{n-s}(x+s) u(x+s);$$

$w(x-n)$ doit donc annuler l'expression adjointe de cette dernière somme

$$\sum_{s=0}^n p_{n-s}(x) u(x-s),$$

ce qui donne bien l'équation (1) pour $w(x)$.

Les équations (19) fournissent deux expressions pour les $q_i(x)$, en fonction des $w(x \pm s)$, suivant qu'on commence le calcul par $q_0(x)$ ou par $q_{n-1}(x)$. Ces deux expressions sont évidemment équivalentes si $w(x)$ vérifie l'équation (20). En commençant par $q_{n-1}(x)$, on trouve immédiatement

$$(21) \quad q_i(x) = \sum_{j=1}^{n-i} p_{i+j}(x-j) w(x-j) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

et ces valeurs, portées dans l'expression de $Q(u(x))$, donnent la forme bilinéaire

$$(22) \quad P(u(x), w(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} p_{i+j}(x-j) u(x+i) w(x-j) \\ = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{n-j} p_{i+j}(x-j) u(x+i) w(x-j).$$

Considérons la différence

$$w(x) P(u(x)) - \Delta P(u(x), w(x)).$$

Elle est linéaire en $w(x)$, $w(x-1)$, \dots , $w(x-n)$, et doit s'annuler pour toute solution $w(x)$ de (20). Elle ne diffère donc de $\bar{P}(w(x))$ que par un facteur; ce facteur est $u(x)$, comme il résulte de la comparaison des coefficients de $w(x-n)$. Quelles que soient les fonctions $u(x)$ et $w(x)$, on a donc

$$(23) \quad w(x) P(u(x)) - u(x) \bar{P}(w(x)) = \Delta P(u(x), w(x)).$$

La réciprocité de $P(u(x))$ et $\bar{P}(w(x))$ apparaît en écrivant (23)

$$u(x) \bar{P}(w(x)) - w(x) P(u(x)) \\ = - \Delta \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} p_{i+j}(x+1-j) u(x+1+i) w(x+1-j);$$

il faut, en effet, introduire l'écart -1 mis en évidence dans l'expression $\bar{P}(u(x))$. Or la dernière somme s'écrit

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-i} p_{i+j}(x-j) u(x+i) w(x-j),$$

ou, en introduisant les coefficients $\bar{p}_s(x) = p_s(x-s)$ de $\bar{P}(u(x))$,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-i} \bar{p}_{i+j}(x+i) w(x-j) u(x+i);$$

cette expression est bien analogue à (22), les changements de signe résultant de la permutation des écarts $+1$ et -1 .

En commençant le calcul des $q_i(x)$ par $q_0(x)$, on trouverait

$$(21') \quad q_i(x) = - \sum_{j=0}^i p_{i-j}(x+j) w(x+j);$$

en raisonnant comme précédemment, on aboutirait à l'expression bilinéaire

$$\begin{aligned} (22') \quad P_1(u(x), w(x)) &= - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i p_{i-j}(x+j) u(x+i) w(x+j) \\ &= - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j}^{n-1} p_{i-j}(x+j) u(x+i) w(x+j), \end{aligned}$$

et à l'identité

$$(23') \quad w(x) P(u(x)) - u(x) \bar{P}_1(w(x)) = \Delta P_1(u(x), w(x)),$$

où l'on a posé

$$\bar{P}_1(w(x)) = \sum_{s=0}^n p_{n-s}(x+s) w(x+s).$$

Signalons que tous ces calculs pourraient être effectués sur l'expression $P(u(x))$ ordonnée suivant l'écart -1 ; il est clair que, dans ces conditions, la marche qui nous a conduits à l'identité (23) fournirait l'identité (23') et réciproquement.

9. Soit $w_1(x)$ une solution de l'équation adjointe (20). Il résulte de (23) que $P(u(x)) = 0$ est équivalent à

$$\Delta P(u(x), w_1(x)) = 0,$$

c'est-à-dire à l'équation linéaire, mais non homogène, d'ordre $n - 1$:

$$P(u(x), w_1(x)) = \pi_1(x),$$

où $\pi_1(x)$ est une fonction périodique arbitraire de période 1.

Plus généralement, si l'on connaît m solutions $w_1(x), w_2(x), \dots, w_m(x)$, linéairement distinctes, de l'équation adjointe, on peut écrire, pour toute solution $u(x)$ de (1), m relations

$$(24) \quad P(u(x), w_i(x)) = \pi_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

L'élimination de $u(x + n - 1), u(x + n - 2), \dots, u(x + n - m + 1)$ entre ces m équations ⁽¹⁾ permet alors de ramener (1) à une équation linéaire non homogène d'ordre $n - m$, dont le terme indépendant de u est une forme linéaire de m fonctions périodiques arbitraires $\pi_1(x), \pi_2(x), \dots, \pi_m(x)$. En particulier, si $m = n$, c'est-à-dire si l'on connaît l'intégrale générale de l'équation adjointe, on peut tirer $u(x)$ des n équations (24), ce qui fournit la solution générale de (1) sous la forme (7).

Les résolutions de deux équations adjointes sont donc deux problèmes équivalents. D'une manière plus particulière, on peut définir une correspondance remarquable entre leurs solutions. Soit $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ un système fondamental de solutions de (1), et formons le déterminant

$$(25) \quad D[u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)] \\ = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1(x+1) & u_2(x+1) & \dots & u_n(x+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1(x+n-1) & u_2(x+n-1) & \dots & u_n(x+n-1) \end{vmatrix}.$$

En posant

$$(26) \quad Q_i(u(x)) = \frac{D[u_1(x), \dots, u_{i-1}(x), u(x), u_{i+1}(x), \dots, u_n(x)]}{D[u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)]},$$

⁽¹⁾ On vérifie aisément que le déterminant des coefficients de ces quantités dans les $m - 1$ premières équations est le produit du déterminant

$$\begin{aligned} & |w_i(x-s)| \quad (i, s = 1, 2, \dots, m-1) \\ \text{par} & \pm p_n(x-1) p_n(x-2) \dots p_n(x-m+1) \end{aligned}$$

et, par suite, diffère de zéro.

on a évidemment (1)

$$(27) \quad Q_i(u_j(x)) = \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

L'équation $\Delta Q_i(u(x)) = 0$, admettant les n solutions $u_j(x)$, son premier membre est de la forme

$$\Delta Q_i(u(x)) \equiv w_i(x) P(u(x)),$$

$w_i(x)$ étant une solution de l'équation adjointe; on sait, de plus, que

$$(28) \quad P(u(x), w_i(x)) = Q_i(u(x)).$$

(27) et (28) permettent d'écrire les n^2 équations

$$(29) \quad P(u_j(x), w_i(x)) = \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Admettons, ce qui est toujours possible, que $p_n(x) \equiv 1$; ces n^2 équations définissent alors entièrement (2) les $w_i(x)$ en fonction des $u_j(x)$. Elles peuvent être remplacées par des relations de forme plus simple. En effet, on calcule aisément $w_i(x)$, sans les résoudre, en remarquant que la dernière équation (19) donne ici

$$w_i(x) = q_{n-1}(x+1),$$

$q_{n-1}(x)$ étant le coefficient de $u(x+n-1)$ dans (26). Il vient ainsi les expressions

$$(30) \quad w_i(x) = (-1)^{n-i} \frac{D[u_1(x+1), \dots, u_{i-1}(x+1), u_{i+1}(x+1), \dots, u_n(x+1)]}{D[u_1(x+1), u_2(x+1), \dots, u_n(x+1)]},$$

équivalentes, d'après les propriétés élémentaires des déterminants, aux relations remarquables

$$(31) \quad \sum_{i=1}^n u_i(x+s) w_i(x) = \varepsilon_{ns} \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

(1) Suivant une notation courante, $\varepsilon_{ij} = 0$ si $i \neq j$, et $\varepsilon_{ii} = 1$.

(2) Avec ce choix des $w_i(x)$, on vérifie aisément que la fonction $\pi_i(x)$ au second membre de (24) est le coefficient de $u_i(x)$ dans l'expression (7) de $u(x)$, en fonction des solutions $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ considérées.

Une conséquence immédiate est que les $w_i(x)$ forment eux-mêmes un système fondamental, car le produit des deux déterminants

$$D[u_1(x+n), u_2(x+n), \dots, u_n(x+n)] \times D[w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x)],$$

formé suivant la règle habituelle, se réduit à l'unité.

En vertu de la symétrie des équations (29) par rapport à (1) et à son adjointe (1'), les deux systèmes fondamentaux $u_i(x)$ et $w_i(x)$ sont réciproques. En particulier, et en se rappelant que l'écart de l'adjointe (20) est -1 , on peut remplacer (30) par les équations réciproques

$$u_i(x) = (-1)^{n+i} \frac{w_1(x-s) \dots w_{i-1}(x-s) w_{i+1}(x-s) \dots w_n(x-s)}{w_1(x-s) w_2(x-s) \dots w_n(x-s)} \quad s=1, 2, \dots, n, \quad 1,$$

qui s'écrivent encore, avec la notation (25),

$$(30') \quad u_i(x+n) = (-1)^{i+1} \frac{D[w_1(x+1) \dots w_{i-1}(x+1) w_{i+1}(x+1) \dots w_n(x+1)]}{D[w_1(x) w_2(x) \dots w_n(x)]}.$$

D'ailleurs la vérification en est aisée à l'aide de (31). Il est bon de remarquer que l'on fait correspondre ainsi, à chaque solution $u_i(x)$ d'un système fondamental, une solution $w_i(x)$ de l'équation adjointe; c'est ce qu'on appelle le *multiplicateur* correspondant.

10. On peut exprimer les fonctions $R_v(x)$ introduites au paragraphe 4 à l'aide des solutions d'un système fondamental et de leurs multiplicateurs. En effet, la comparaison des équations (13)

$$p_0(x+v) R_v(x) + p_1(x+v-1) R_{v-1}(x) + \dots + p_n(x+v-n) R_{v-n}(x) = 0$$

et des équations vérifiées par les $w_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, n$)

$$p_0(x+v) w_i(x+v) + p_1(x+v-1) w_i(x+v-1) + \dots + p_n(x+v-n) w_i(x+v-n) = 0$$

montre qu'il existe n fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, \dots , $\varphi_n(x)$ telles qu'on ait, pour toutes les valeurs de l'entier v ,

$$R_v(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) w_i(x+v).$$

(1) On a également $\bar{p}_n(x) = p_n(x-n) = 1$.

En particulier, les valeurs $-1, -2, \dots, -n$ de ν donnent les n équations ⁽¹⁾

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \omega_i(x-s) = \varepsilon_{ns} \quad (s=1, 2, \dots, n),$$

qui ne sont autres que les équations (31) où l'on aurait remplacé les $u_i(x)$ par les $\varphi_i(x)$ et la variable x par $x-s$. On a donc

$$\varphi_i(x) = u_i(x),$$

et, par suite ⁽²⁾,

$$(32) \quad R_\nu(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x) \omega_i(x+\nu).$$

En résumé, les sommes au premier membre de (31) ont, quel que soit s , une valeur indépendante du système fondamental $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ considéré, et les fonctions définies par ces sommes, et qui sont ainsi associées à l'équation (1), sont justement les $R_\nu(x)$.

Si l'on met la solution (9) de l'équation (1) sous une forme linéaire (7) des $u_i(x)$, les facteurs $\pi_i(x)$ dans cette expression s'expriment simplement à l'aide des multiplicateurs $\omega_i(x)$ des $u_i(x)$, et de la fonction génératrice $f(x)$. En effet, les équations (32) permettent d'écrire (9)

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} u_i(x) \omega_i(x+\nu) f(x+\nu),$$

et l'identification avec l'expression (7) donne

$$(33) \quad \pi_i(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \omega_i(x+\nu) f(x+\nu).$$

⁽¹⁾ Avec l'hypothèse $p_n(x) = 1$, la première équation (13') s'écrit en effet $R_{-n}(x) = 1$.

⁽²⁾ En écrivant (32)

$$R_\nu(x-\nu) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) u_i(x-\nu),$$

on voit que les $\bar{R}_\nu(x)$ associés à l'équation adjointe sont les $R_\nu(x-\nu)$. Les équations analogues à (12), écrites pour les $\bar{R}_\nu(x)$, ne sont autres que les équations (13), et réciproquement.

III. — ÉQUATIONS A SECOND MEMBRE.

11. Une équation linéaire non homogène peut s'écrire

$$(34) \quad P(u(x)) = \sum_{s=0}^n p_s(x) u(x+s) = p(x).$$

Nous dirons que c'est une équation avec un second membre, l'équation $P(u(x)) = 0$ étant dite sans second membre. Si $\bar{u}(x)$ désigne une solution particulière de (34), et $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ un système fondamental de solutions de $P(u(x)) = 0$, la solution générale de (34) est de la forme

$$u(x) = \bar{u}(x) + \sum_{i=1}^n \pi_i(x) u_i(x).$$

La connaissance d'un système fondamental de solutions de l'équation sans second membre permet de ramener la résolution de (34) à celle de n équations du premier ordre. Voici le procédé de Lagrange, appelé « méthode de variation des constantes ».

Cherchons à satisfaire à l'équation (34) par une expression de la forme

$$(35) \quad u(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) u_i(x).$$

$n-1$ des fonctions $f_i(x)$ étant arbitraires, on peut assujettir ces fonctions à donner, des $u(x+s)$ ($s=1, 2, \dots, n-1$), les mêmes expressions que si les coefficients étaient périodiques de période 1, c'est-à-dire

$$(36) \quad u(x+s) = \sum_{i=1}^n f_i(x) u_i(x+s) \quad (s=1, 2, \dots, n-1).$$

Il suffit que les $f_i(x)$ vérifient les $n-1$ équations

$$(37) \quad \sum_{i=1}^n u_i(x+s) \Delta f_i(x) = 0 \quad (s=1, 2, \dots, n-1).$$

On déduit alors, de la dernière des équations (36),

$$u(x+n) = \sum_{i=1}^n f_i(x) u_i(x+n) + \sum_{i=1}^n u_i(x+n) \Delta f_i(x),$$

et la substitution, dans (34), de ces expressions des

$$u(x+s) \quad (s = 0, 1, \dots, n),$$

donne

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) P(u_i(x)) + p_n(x) \sum_{i=1}^n u_i(x+n) \Delta f_i(x) = p(x).$$

En admettant que $p_n(x) = 1$, cette équation se réduit à

$$(38) \quad \sum_{i=1}^n u_i(x+n) \Delta f_i(x) = p(x),$$

qui, jointe à (37), détermine complètement les $\Delta f_i(x)$. D'ailleurs, la comparaison de ces équations avec le système (31) montre que l'on a

$$(39) \quad \Delta f_i(x) = p(x) w_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x)$ désignant les multiplicateurs correspondant au système des solutions $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$. La résolution générale de (34) est ainsi ramenée à la résolution des n équations distinctes (39), c'est-à-dire à n sommations (4).

A l'aide des $R_v(x)$, on peut former très simplement une solution formelle de (34). Considérons la série

$$(40) \quad u(x) = - \sum_{v=0}^{\infty} R_v(x) p(x+v);$$

on a évidemment

$$u(x+s) = - \sum_{v=s}^{\infty} R_{v-s}(x+s) p(x+v),$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} P(u(x)) &= - \sum_{s=0}^n \sum_{v=-s}^{\infty} p_s(x) R_{v-s}(x+s) p(x+v) \\ &= - \sum_{v=0}^n p(x+v) \sum_{s=0}^v p_s(x) R_{v-s}(x+s) \\ &\quad - \sum_{v=n+1}^{\infty} p(x+v) \sum_{s=0}^n p_s(x) R_{v-s}(x+s). \end{aligned}$$

(1) On trouvera un exposé de différentes méthodes pour résoudre une équation de la forme (39) dans l'Ouvrage suivant : *Sur la somme d'une fonction* (Mémoires des Sciences mathématiques, fascicule XXIV, Paris, 1927).

D'après les équations (12), ce second membre se réduit à

$$-p_0(x) R_0(x) p(x) = p(x),$$

donc la série (40) représente une solution de (34), si elle converge. On verrait de même que la série

$$(40') \quad u(x) = \sum_{v=1}^{\infty} R_{-v}(x) p(x-v)$$

est également une solution formelle (1).

12. Résolvons, à titre d'exemple, l'équation à coefficients constants

$$(41) \quad u(x+n) + \sum_{s=0}^{n-1} c_s u(x+s) = \alpha^x.$$

L'équation sans second membre est vérifiée par $u(x) = t^x$ si la constante t est solution de l'équation

$$\varphi(t) \equiv t^n + \sum_{s=0}^{n-1} c_s t^s = 0.$$

Si cette équation admet n racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, on connaît donc n solutions

$$u_i(x) = \alpha_i^x \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

de l'équation sans second membre, qui forment un système fondamental. L'expression (30) fournit aisément les multiplicateurs correspondants

$$w_i(x) = \frac{1}{\alpha_i^{x+1} \varphi'(\alpha_i)},$$

de sorte que les équations (39) s'écrivent ici

$$(42) \quad f_i(x+1) - f_i(x) = \frac{1}{\alpha_i \varphi'(\alpha_i)} \left(\frac{a}{\alpha_i} \right)^x.$$

Si a est différent de α_i , la solution générale de (42) est

$$f_i(x) = \frac{1}{(a - \alpha_i) \varphi'(\alpha_i)} \left(\frac{a}{\alpha_i} \right)^x + \pi_i(x),$$

(1) Ceci est d'ailleurs une conséquence de la façon dont ont été définis les $R_v(x)$ au paragraphe 4.

où $\pi_i(x)$ est une fonction périodique arbitraire. Donc, si a diffère de tous les a_i , la solution générale de (41) est

$$(43) \quad \begin{aligned} u(x) &= a^x \sum_{i=1}^n \frac{1}{(a-a_i)\varphi'(a_i)} + \sum_{i=1}^n \pi_i(x) a_i^x \\ &= \frac{a^x}{\varphi(a)} + \sum_{i=1}^n \pi_i(x) a_i^x. \end{aligned}$$

La solution particulière $\frac{a^x}{\varphi(a)}$ est justement celle que fournirait la série (40). On a en effet

$$R_\nu(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^{\nu+1} \varphi'(a_i)},$$

ce qui donne pour (40) l'expression

$$u(x) = - \sum_{i=1}^n \frac{a^x}{a_i \varphi'(a_i)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a_i} \right)^{\nu}.$$

Si $|a| < |a_i|$ ($i=1, 2, \dots, n$), ces n séries sont convergentes, et l'on obtient la solution

$$u(x) = a^x \sum_{i=1}^n \frac{1}{(a-a_i)\varphi'(a_i)} = \frac{a^x}{\varphi(a)}.$$

La conclusion subsiste évidemment pourvu que a diffère des a_i .

Si a est égal à l'un des a_s , l'équation correspondante (42) se réduit à

$$f_s(x+1) - f_s(x) = \frac{1}{a \varphi'(a)},$$

dont une solution évidente est $\frac{x}{a \varphi'(a)}$. La solution générale de (41) est donc maintenant ⁽¹⁾

$$u(x) = \frac{x a^{x-1}}{\varphi'(a)} + \sum_{i=1}^n \pi_i(x) a_i^x.$$

⁽¹⁾ Cette forme de la solution peut se déduire de (43), par continuité, le passage à la limite se faisant en écrivant (43) sous la forme

$$\frac{a^x - a_s^x}{\varphi(a)} + \sum_{i=1}^n \pi_i(x) a_i^x,$$

IV. — ABAISSEMENT DE L'ORDRE D'UNE ÉQUATION.

13. La connaissance de m solutions linéairement indépendantes d'une équation homogène d'ordre n permet de diminuer son ordre de m unités, grâce à la résolution de m équations du premier ordre.

Soit $u_1(x)$ une solution de l'équation (1). Faisons le changement d'inconnue

$$u(x) = u_1(x) v(x),$$

et transformons l'expression

$$P(u(x)) = \sum_{i=1}^n p_i(x) u_1(x+i) v(x+i)$$

par la transformation d'Abel

$$\sum_{i=1}^n b_i c_i = \sum_{i=0}^{n-1} (c_i - c_{i+1}) \sum_{s=0}^i b_s + c_n \sum_{s=0}^n b_s.$$

Il vient ainsi

$$(44) \quad P(u(x)) = - \sum_{i=0}^{n-1} \Delta v(x+i) \sum_{s=0}^i p_s(x) u_1(x+s) \\ + v(x+n) P(u_1(x)) = 0.$$

En posant

$$(45) \quad \Delta v(x) = w(x),$$

l'hypothèse faite sur $u_1(x)$ donne, pour $w(x)$, l'équation

$$(46) \quad \sum_{i=0}^{n-1} w(x+i) \sum_{s=0}^i p_s(x) u_1(x+s) = 0,$$

qui est effectivement d'ordre $n-1$, car les coefficients de $w(x)$ et $w(x+n-1)$ sont respectivement $p_0(x) u_1(x)$ et $-p_n(x) u_1(x+n)$.

Si $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_m(x)$ sont m solutions linéairement distinctes de $P(u(x)) = 0$, l'équation (44) admet les solutions

$$\frac{u_2(x)}{u_1(x)}, \quad \frac{u_3(x)}{u_1(x)}, \quad \dots, \quad \frac{u_m(x)}{u_1(x)},$$

et l'on connaît $m - 1$ solutions de (46)

$$\Delta \frac{u_2(x)}{u_1(x)}, \quad \Delta \frac{u_3(x)}{u_1(x)}, \quad \dots, \quad \Delta \frac{u_m(x)}{u_1(x)}.$$

Ces solutions sont elles-mêmes linéairement distinctes, car une relation

$$\sum_{s=2}^m \pi_s(x) \frac{u_s(x)}{u_1(x)} = 0$$

entraînerait, contrairement à l'hypothèse, une relation de la forme

$$\sum_{s=2}^m \pi_s(x) \frac{u_s(x)}{u_1(x)} = \pi_1(x),$$

Si m est supérieur à 1, on peut donc répéter l'application du procédé, sur l'équation (46), ce qui conduira à une équation d'ordre $n - 2$, et ainsi de suite jusqu'à une équation d'ordre $n - m$.

Par exemple, si l'on considère l'équation

$$u(x+2) + p_1(x) u(x+1) + p_0(x) u(x) = 0,$$

(46) est l'équation du premier ordre

$$u_1(x+2) w(x+1) - p_0(x) u_1(x) w(x) = 0.$$

Donc, quand on connaît une solution particulière d'une équation linéaire et homogène du second ordre, on obtient sa solution générale en résolvant deux équations du premier ordre.



CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES PAR DES SÉRIES DE FACULTÉS.

I. — FORMATION D'UN SYSTÈME FONDAMENTAL DE SOLUTIONS.

14. Grâce à la facilité avec laquelle elles se prêtent au calcul aux différences finies, les séries de facultés ⁽¹⁾ permettent d'établir une théorie d'une classe générale d'équations aux différences linéaires, tout à fait analogue à la théorie classique de Fuchs des équations différentielles linéaires. Plusieurs des artifices dus à Fuchs ⁽²⁾ et Frobenius ⁽³⁾, dans cette dernière théorie, s'appliquent également à notre sujet.

Considérons une équation (1) (§ 1) mise sous la forme (3') (§ 1), et supposons que ses coefficients $Q_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) soient des fonctions de x admettant une représentation de la forme ⁽⁴⁾

$$(1) \quad Q_i(x) = \sum_{s=1}^1 b_{-s}^{(i)}(x-1)(x-2)\dots(x-s) + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_s^{(i)}}{x(x+1)\dots(x+s-1)}.$$

⁽¹⁾ La lecture de ce Chapitre suppose la connaissance des propriétés essentielles des séries de facultés. Nous emploierons les définitions et les résultats exposés dans les *Leçons sur les séries d'interpolation*, p. 170-227, par N. E. NÖRLUND (Paris, 1926).

⁽²⁾ L. FUCHS, *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LXVI, 1866, p. 121-160; t. LXVIII, 1868, p. 354-385).

⁽³⁾ G. FROBENIUS, *Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LXXVI, 1873, p. 214-235).

⁽⁴⁾ On convient de remplacer, dans tout ce qui suit, un produit

$$(x-1)(x-2)\dots(x-s) \quad \text{ou} \quad x(x+1)\dots(x+s-1)$$

par 1 pour $s = 0$.

En posant

$$Q_i(x) = (-1)^i (x-1)(x-2)\dots(x-i) q_i(x),$$

$q_i(x)$ est représentable, à un terme constant près, par une série de facultés. En mettant cette constante sous le signe Σ pour unifier l'écriture, nous poserons

$$(2) \quad q_i(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s^{(i)}}{x(x+1)\dots(x+s-1)}.$$

L'équation aux différences considérée prend ainsi la forme dite *normale*

$$(3) \quad P(u(x)) \equiv \sum_{i=0}^n (-1)^i (x-1)(x-2)\dots(x-i) q_i(x) \Delta_{-1}^i u(x) = 0.$$

Nous supposerons en outre que $Q_n(x)$ est essentiellement d'ordre n à l'infini, c'est-à-dire $b_{-n}^{(n)} \neq 0$; il en résulte $a_0^{(n)} \neq 0$. L'équation (3) comprend comme cas particulier les équations dont les coefficients $Q_i(x)$ sont des polynomes de degré i au plus, $Q_n(x)$ étant effectivement de degré n .

Remarquons encore que l'hypothèse faite sur $q_n(x)$ entraîne l'existence de développements de la forme (2) pour les $\frac{q_i(x)}{q_n(x)}$. Nous pouvons donc supposer, sans diminuer la généralité, que $q_n(x) = 1$.

15. Cherchons un développement de la forme

$$(4) \quad u(x) = \sum_{v=0}^{\infty} g_v \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho+v)} \quad (g_v \neq 0),$$

où ρ est une constante, qui vérifie formellement l'équation (3). Sachant que

$$(-1)^i \Delta_{-1}^i \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\mu)} = \mu(\mu+1)\dots(\mu+i-1) \frac{\Gamma(x-i)}{\Gamma(x+\mu)},$$

ce qui se vérifie par récurrence, on a tout d'abord

$$P\left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\mu)}\right) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\mu)} \sum_{i=0}^n \mu(\mu+1)\dots(\mu+i-1) q_i(x);$$

Cette équation sera appelée l'*équation déterminante*. Elle a effectivement n racines, distinctes ou non, car $\alpha_0^{(n)} \neq 0$.

Plus généralement, supposons que ρ ne vérifie pas nécessairement (8), mais bornons sa variation à un certain voisinage Γ des racines de cette équation. Si k désigne la plus grande différence entière de deux de ces racines, les seuls coefficients des premiers termes des équations (9) qui sont susceptibles de s'annuler sont $f_0(\rho+1)$, $f_0(\rho+2)$, ..., $f_0(\rho+k)$, pourvu que Γ soit assez restreint. Mais l'indétermination sur g_0 nous permet de prendre

$$(11) \quad g_0(\rho) = f_0(\rho+1)f_0(\rho+2)\dots f_0(\rho+k)C(\rho),$$

$C(\rho)$ étant une fonction entière qui ne s'annule pas dans Γ , et, pour une telle valeur, toutes les équations (9) sont résolubles. Elles donnent d'ailleurs, pour expression de $g_v(\rho)$, le produit de $C(\rho)$ par une fonction rationnelle de ρ ,

En résumé, il existe un certain voisinage Γ des racines de l'équation déterminante, pour les valeurs ρ duquel on peut trouver une série (4) vérifiant formellement l'équation non homogène

$$(12) \quad P(u(x)) = g_0(\rho)f_0(\rho)\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)},$$

où $g_0(\rho)$ a la forme (11). La résolution formelle de (3) est un cas particulier de ce résultat.

16. Pour démontrer la convergence des développements obtenus, introduisons la notion de *série de facultés majorante*. Étant donnée une série de facultés de coefficients α_s

$$(13) \quad \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha_s s!}{x(x+1)\dots(x+s)},$$

d'abscisse de convergence λ , on sait que, si λ' désigne le plus grand des nombres λ et 0, on a

$$\lambda' \leq \limsup \frac{\log \left| \sum_{s=0}^v \alpha_s \right|}{\log v},$$

l'égalité ayant lieu si $\lambda' = \lambda$. Il en résulte que, à partir d'une certaine

valeur de ν ,

$$(14) \quad \left| \sum_{s=0}^{\nu} a_s \right| < \nu^{\lambda'+\varepsilon}$$

quel que soit le nombre positif ε , ou encore qu'on peut trouver un nombre positif M tel que l'on ait

$$\left| \sum_{s=0}^{\nu} a_s \right| < M \frac{(\lambda' + \varepsilon + 1)(\lambda' + \varepsilon + 2) \dots (\lambda' + \varepsilon + \nu)}{\nu!}.$$

Considérons alors la série

$$(15) \quad \frac{M}{x - \lambda' - \varepsilon} = M \left\{ \frac{1}{x} + \frac{\lambda' + \varepsilon}{x(x+1)} + \dots + \frac{(\lambda' + \varepsilon)(\lambda' + \varepsilon + 1) \dots (\lambda' + \varepsilon + s - 1)}{x(x+1) \dots (x+s)} + \dots \right\};$$

elle est absolument convergente pour $\sigma > \lambda' + \varepsilon$. Ses coefficients sont positifs, et la somme des $\nu + 1$ premiers est

$$M \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\lambda' + \varepsilon + s - 1}{s} = M \binom{\lambda' + \varepsilon + \nu}{\nu},$$

donc supérieure, quel que soit ν , à la valeur absolue de la somme correspondante relative à la série (13). Nous conviendrons de dire que la série (15) est une série majorante de (13), en vertu de ces deux propriétés.

Revenons à la série (4), et posons

$$(16) \quad u(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \nu(x),$$

de sorte que $\nu(x)$ représente le développement

$$(17) \quad \nu(x) = g_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g_{1+\nu}}{(x+\rho)(x+\rho+1) \dots (x+\rho+\nu)}.$$

La transformation linéaire $(x, x - \rho + 1)$ nous permet d'écrire encore

$$(18) \quad \nu(x) = G_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{G_{\nu}}{(x+1)(x+2) \dots (x+\nu)},$$

où $G_0 = g_0$, et nous savons que les deux séries de facultés (17) et (18) ont un demi-plan commun de convergence, de sorte que la convergence de $u(x)$ découlera de celle de (18).

Nous sommes ainsi conduits à montrer que l'équation qu'on déduit de (12) pour la nouvelle inconnue $v(x)$ admet une solution de la forme (18).

Or, on déduit de (16)

$$(19) \quad \Delta_{-1} u(x) = \frac{\Gamma(x-1)}{\Gamma(x+\rho)} [\rho v(x) - (x+\rho-1) \Delta_{-1} v(x)],$$

dont la forme est analogue à (16), avec la nouvelle fonction

$$v_1(x) = \rho v(x) - (x+\rho-1) \Delta_{-1} v(x).$$

Cette remarque permet d'itérer aisément l'opération (19), et l'on obtient, par récurrence, l'identité

$$\{-1\}^i \Delta_{-1}^i u(x) = \frac{\Gamma(x-i)}{\Gamma(x+\rho)} \sum_{s=0}^i (-1)^s \binom{i}{s} \rho(\rho+1)\dots(\rho+i-s-1)(x+\rho-1)(x+\rho-2)\dots(x+\rho-s) \Delta_{-1}^s v(x).$$

L'équation (12) se transforme ainsi en l'équation suivante en $v(x)$:

$$(20) \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i (x+\rho-1)(x+\rho-2)\dots(x+\rho-i) q_i(x) \Delta_{-1}^i v(x) = g_0(\rho) f_0(\rho),$$

où $q_i(x)$ est la fonction linéaire de $q_i(x)$, $q_{i+1}(x)$, ..., $q_{n-1}(x)$

$$(21) \quad q_i(x) = \sum_{s=i}^n \binom{s}{i} \rho(\rho+1)\dots(\rho+s-i-1) q_s(x).$$

Si λ désigne la plus grande des abscisses de convergence des séries $q_i(x)$, les $q_i(x)$ sont représentables par des séries de facultés, convergentes pour $\sigma > \lambda$,

$$q_i(x) = a_0^{(i)} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_s^{(i)}}{x(x+1)\dots(x+s-1)}.$$

Multiplions l'équation (20) par

$$r(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{(x+\rho-1)(x+\rho-2)\dots(x+\rho-n)}.$$

Le facteur de $\Delta_{-1}^i \varphi(x)$ devient

$$\frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{(x+\rho-i-1)(x+\rho-i-2)\dots(x+\rho-n)} q_i(x) \\ = x(x-1)\dots(x-i+1) q_i(x) \frac{(x-i)(x-i-1)\dots(x-n+1)}{(x+\rho-i-1)(x+\rho-i-2)\dots(x+\rho-n)};$$

et, le dernier facteur admettant un développement de la forme

$$\frac{(x-i)(x-i-1)\dots(x-n+1)}{(x+\rho-i-1)(x+\rho-i-2)\dots(x+\rho-n)} = 1 + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{d_s^i}{x(x+1)\dots(x+s)},$$

le produit

$$r_i(x) = q_i(x) \frac{(x-i)(x-i-1)\dots(x-n+1)}{(x+\rho-i-1)(x+\rho-i-2)\dots(x+\rho-n)}$$

admettra lui aussi un développement en série de facultés

$$(22) \quad r_i(x) = a_0^{(i)} - \bar{r}_i(x),$$

où

$$(23) \quad \bar{r}_i(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{r_s^{(i)} s!}{x(x+1)\dots(x+s)}.$$

L'équation (20) est ainsi remplacée par l'équation

$$(24) \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i x(x-1)\dots(x-i+1) r_i(x) \Delta_{-1}^i \varphi(x) = g_0(\rho) f_0(\rho) r(x),$$

dont les coefficients $r_i(x)$ ont des développements de la forme (22). Enfin $r(x)$ admet également un développement

$$(25) \quad r(x) = 1 + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v \nu!}{x(x+1)\dots(x+\nu)},$$

que l'on peut encore transformer en

$$(25') \quad r(x) = 1 + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{C_v}{(x+1)(x+2)\dots(x+v+1)}.$$

En outre, l'abscisse de convergence de (25) étant $\mathcal{R}(n-\rho)$, les séries

qui entrent dans les coefficients de (24), et qui ont été obtenues par des multiplications de séries de facultés, sont convergentes pour $\sigma > \mu$, μ désignant le plus grand des nombres λ , 0, $\mathcal{R}(n - \rho)$. Remarquons encore que $r_n(x) = q_n(x) = q_n(x) = 1$, donc que $\bar{r}_n(x) = 0$.

En mettant en évidence, dans l'équation (24), les termes constants des $r_i(x)$, on est conduit à poser

$$\begin{aligned} A(v(x)) &\equiv \sum_{i=0}^n (-1)^i a_0^{(i)} x(x-1) \dots (x-i+1) \Delta_{-1}^i v(x), \\ B(v(x)) &\equiv \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \bar{r}_i(x) x(x-1) \dots (x-i+1) \Delta_{-1}^i v(x), \end{aligned}$$

avec quelles notations notre équation s'écrit

$$(26) \quad A(v(x)) = B(v(x)) + g_0(\rho) f_0(\rho) r(x).$$

Nous savons que (26) admet la solution formelle (18). La substitution de ce développement dans $A(v(x))$ donne

$$(27) \quad A(v(x)) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{G_v}{(x+1)(x+2) \dots (x+v)} \sum_{i=0}^n v(v+1) \dots (v+i-1) a_0^{(i)}.$$

Or, il résulte de (21) que

$$a_0^{(i)} = \sum_{s=i}^n \binom{s}{i} \rho(\rho+1) \dots (\rho+s-i-1) \bar{a}_0^{(s)},$$

donc la dernière somme de (27) s'écrit

$$\sum_{s=0}^n a_0^{(s)} \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} \rho(\rho+1) \dots (\rho+s-i-1) v(v+1) \dots (v+i-1),$$

ou, d'après une identité classique ⁽¹⁾,

$$\sum_{s=0}^n a_0^{(s)} (\rho+v) (\rho+v+1) \dots (\rho+v+s+1) = f_0(\rho+v).$$

⁽¹⁾ C'est d'ailleurs un cas particulier de la formule d'interpolation de Newton, Cf., par exemple, N. E. NÖRLUND, *loc. cit.*, p. 3.

Il vient ainsi

$$(28) \quad A(v(x)) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{G_v f_0(\rho + v)}{(x+1)(x+2)\dots(x+v)}.$$

En posant

$$(29) \quad f(x, v) = \sum_{i=0}^{n-1} v(v+1)\dots(v+i-1) \bar{r}_i(x),$$

on trouve de même

$$(30) \quad B(v(x)) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{G_v f(x, v)}{(x+1)(x+2)\dots(x+v)}.$$

Remplaçons, dans $f(x, v)$, les $\bar{r}_i(x)$ par leurs développements. Nous obtenons, pour $f(x, v)$, un développement de la même nature, que la transformation $(x, x+v+1)$ nous permet d'écrire

$$(31) \quad f(x, v) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{F_s(v)}{(x+v+1)(x+v+2)\dots(x+v+1+s)},$$

et ce développement est convergent pour $\sigma > \mu$, car $v+1$ est un nombre positif. En substituant les développements (31) dans (30), il vient

$$(32) \quad B(v(x)) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{G_0 F_{v-1}(0) + G_1 F_{v-2}(1) + \dots + G_{v-1} F_0(v-1)}{(x+1)(x+2)\dots(x+v)}.$$

Il ne reste plus qu'à porter les développements (25'), (28) et (32) dans l'équation (26) et à identifier terme à terme. On arrive ainsi aux relations suivantes en $G_1, G_2, \dots, G_v, \dots$:

$$(33) \quad G_v f_0(\rho + v) = G_{v-1} F_0(v-1) + G_{v-2} F_1(v-2) + \dots \\ + g_0 F_{v-1}(0) + g_0 f_0(\rho) C_{v-1},$$

dont les coefficients $f_0(\rho)$, C_{v-1} et $F_s(v-1-s)$ sont des fonctions rationnelles de ρ . En choisissant $g_0(\rho)$ comme il a été fait au paragraphe 15, les équations (33) sont toutes résolubles, et donnent, de G_v , une expression finie dans le domaine Γ et de la forme

$$G_v = R_v(\rho) C(\rho),$$

$R_v(\rho)$ étant rationnel en ρ , et $C(\rho)$ désignant la même fonction entière que plus haut.

Le résultat essentiel de ce calcul est que les $F_s(\nu)$ sont des *formes linéaires, à coefficients positifs, des quantités*

$$R_s^{(i)} = \sum_{h=0}^s r_h^{(i)} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

On a en effet, par définition,

$$f(x, \nu) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s! \sum_{i=0}^{n-1} \nu(\nu+1)\dots(\nu+i-1) r_s^{(i)}}{x(x+1)\dots(x+s)};$$

donc

$$\begin{aligned} F_s(\nu) &= s! \sum_{h=0}^s \binom{\nu+h}{\nu} \sum_{i=0}^{n-1} \nu(\nu+1)\dots(\nu+i-1) r_{s-h}^{(i)} \\ &= s! \sum_{i=0}^{n-1} \nu(\nu+1)\dots(\nu+i-1) \sum_{h=0}^s \binom{\nu+s-h}{\nu} r_h^{(i)}. \end{aligned}$$

La dernière somme s'écrit encore, avec la convention $R_{-1}^{(i)} = 0$,

$$\sum_{h=0}^s \binom{\nu+s-h}{\nu} [R_h^{(i)} - R_{h-1}^{(i)}] = \sum_{h=0}^s \binom{\nu+s-h-1}{\nu-1} R_h^{(i)};$$

notre affirmation est ainsi démontrée. Il résulte de là que, si l'on remplace les séries $\bar{r}_i(x)$ par des séries majorantes, les $F_s(\nu)$ sont remplacés par des quantités positives et plus grandes en valeur absolue. Ces séries étant convergentes pour $\sigma > \mu$, nous prendrons pour série majorante commune une série, de la forme (15),

$$M \frac{1}{x - \mu - \varepsilon} = \sum_{s=0}^{\infty} M \cdot \frac{\nu(\nu+1)\dots(\nu+s-1)}{x(x+1)\dots(x+s)},$$

où M est un nombre positif indépendant de ρ , et suffisamment grand.

De même, sachant que

$$C_\nu = \nu! \sum_{s=0}^{\nu} c_s,$$

les C_ν seront remplacés par des nombres positifs et plus grands en

valeur absolue, si l'on substitue à la série (25) une série majorante

$$1 + \frac{K}{x - \mu - \varepsilon} = 1 + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{K(\mu - \varepsilon)(\mu + \varepsilon + 1) \dots (\mu + \varepsilon + s - 1)}{x(x+1) \dots (x+s)},$$

où K est un nombre positif suffisamment grand.

Cela posé, considérons l'équation aux différences finies

$$(34) \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i A_i x(x-1) \dots (x-i+1) \Delta_{-1}^i \varphi(x) \\ = \frac{M}{x - \mu - \varepsilon} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x(x-1) \dots (x-i+1) \Delta_{-1}^i \varphi(x) + \bar{G}_0 \left(1 + \frac{K}{x - \mu - \varepsilon} \right),$$

où les A_i et \bar{G}_0 sont des constantes, la dernière positive, dont les valeurs vont être choisies. Son équation déterminante est

$$\bar{f}_0(z) = \sum_{i=0}^n A_i z(z+1) \dots (z+i-1) = 0.$$

Prenons $A_0 = 1$, A_n compris entre 0 et 1, et les autres constantes A_i de manière que l'on ait

$$\sum_{i=0}^n A_i z(z+1) \dots (z+i-1) \equiv A_n z^n + 1.$$

L'équation (34) a la forme de (26); elle est donc formellement satisfaite par une série

$$(35) \quad \bar{\varphi}(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\bar{G}_v}{(x+1)(x+2) \dots (x+v)},$$

dont les coefficients sont donnés par des équations analogues à (33), où ρ serait nul, car l'égalité des termes constants de $\bar{\varphi}(x)$ et du dernier terme de l'équation entraîne la condition $\bar{f}_0(\rho) = 1$; on aura donc ($v = 1, 2, \dots$)

$$(36) \quad \bar{G}_v (A_n v^n + 1) = \bar{G}_{v-1} \bar{F}_0(v-1) + \bar{G}_{v-2} \bar{F}_1(v-2) + \dots \\ + \bar{G}_0 \bar{F}_{v-1}(0) + \bar{G}_0 \bar{G}_{v-1},$$

et les $\overline{F}_s(\nu)$ et les \overline{C}_s sont respectivement supérieurs aux $|F_s(\nu)|$ et aux $|C_s|$.

Il résulte de là que les inégalités

$$(37) \quad \overline{G}_0 > |g_0 f_0(\rho)|,$$

$$(38) \quad \overline{G}_i > |G_i| \quad (i = 0, 1, \dots, \nu - 1)$$

entraînent

$$\overline{G}_\nu (\Lambda_n \nu^n + 1) > |G_\nu f_0(\rho + \nu)|,$$

et que, par conséquent, si N est un nombre entier positif, assez grand pour que l'inégalité

$$(\Lambda_n i^n + 1) < |f_0(\rho + i)|$$

ait lieu pour $i > N$, ce qui est possible d'après $\Lambda_n < a_0^{(n)} = 1$, l'inégalité

$$\overline{G}_\nu > |G_\nu|$$

sera vraie quel que soit ν , si elle l'est pour $\nu = 0, 1, \dots, N$. Or il est aisé de choisir \overline{G}_0 tel que ces conditions soient réalisées. Nous savons déjà que $G_\nu = R_\nu(\rho) C(\rho)$; on a de même $\overline{G}_\nu = E_\nu \overline{G}_0$, les E_ν étant des nombres finis et positifs. Donc, si l'on désigne par R un nombre positif, supérieur à 1, $|R_1(\rho)|, |R_2(\rho)|, \dots, |R_N(\rho)|, |f_0(\rho)|, |C(\rho)|$ et $|g_0(\rho)|$ quel que soit ρ dans Γ , et par E le plus petit des nombres 1, E_1, E_2, \dots, E_N , qui est un nombre positif, les inégalités (37) et (38) seront satisfaites si l'on prend $E \overline{G}_0$ supérieur à R^2 .

Il ne nous reste plus qu'à démontrer la convergence de (35). Mais nous pouvons profiter de la forme spéciale de l'équation (34) pour remplacer les relations de récurrence (36) par d'autres plus commodés. La substitution de (35) dans cette équation donne en effet

$$(39) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\overline{G}_\nu (\Lambda_n \nu^n + 1)}{(x+1)(x+2)\dots(x+\nu)} \\ = \frac{M}{x-\mu-\varepsilon} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{G_\nu \psi(\nu)}{(x+1)(x+2)\dots(x+\nu)} + \frac{K \overline{G}_0}{x-\mu-\varepsilon},$$

où l'on a posé

$$\psi(\nu) = \sum_{i=0}^{n-1} \nu(\nu+1)\dots(\nu+i-1).$$

En multipliant (39) par $x - \mu - \varepsilon$, pris sous la forme

$$x + \nu - (\mu + \varepsilon + \nu)$$

pour multiplier le terme de rang ν du premier membre, son premier membre s'écrit

$$\overline{G}_1(A_n + 1) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\overline{G}_{\nu+1}[A_n(\nu+1)^n + 1] - \overline{G}_{\nu}(\mu + \varepsilon + \nu)[A_n \nu^n + 1]}{(x+1)(x+2)\dots(x+\nu)},$$

et, par suite, l'identification terme à terme avec le second membre donne

$$\begin{aligned} \overline{G}_1(A_n + 1) &= (M \psi(0) + K) \overline{G}_0, \\ \overline{G}_{\nu+1}[A_n(\nu+1)^n + 1] &= [M \psi(\nu) + (\mu + \varepsilon + \nu)(A_n \nu^n + 1)] \overline{G}_{\nu} \\ &\quad (\nu = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Cette équation générale s'écrit

$$(40) \quad \overline{G}_{\nu+1} = \frac{(\nu + b_0)(\nu + b_1)\dots(\nu + b_n)}{(\nu + c_1)(\nu + c_2)\dots(\nu + c_n)} \overline{G}_{\nu},$$

où $b_0, b_1, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n$ sont des quantités indépendantes de ν , et telles que

$$\sum_{s=0}^n b_s - \sum_{s=1}^n c_s = \mu + \varepsilon - n.$$

On déduit de (40)

$$\overline{G}_{\nu} = H \frac{\Gamma(\nu + b_0) \Gamma(\nu + b_1) \dots \Gamma(\nu + b_n)}{\Gamma(\nu + c_1) \Gamma(\nu + c_2) \dots \Gamma(\nu + c_n)} \overline{G}_0,$$

H étant une constante, d'où l'on conclut qu'il existe un nombre positif L tel qu'on ait, quel que soit le nombre positif ε ,

$$\frac{\overline{G}_{\nu}}{(\nu-1)!} < L \nu^{\mu+\varepsilon-n} \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

et, par conséquent,

$$\frac{|G_{\nu}|}{(\nu-1)!} < L \nu^{\mu+\varepsilon-n}.$$

Les séries (35) et (18) sont donc absolument convergentes pour $\sigma > \mu - n$. La transformation $(x, x-1)$ donne enfin

$$(41) \quad \varphi(x) = G_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{G_{\nu+1} - \nu G_{\nu}}{x(x+1)\dots(x+\nu)},$$

et l'on sait que cette série doit converger pour $\sigma > \mu - n$, mais non forcément de manière absolue dans ce domaine. Mais ce qui est essentiel est que *sa convergence est uniforme par rapport à ρ* . En effet, ρ n'est intervenu, dans la détermination des \bar{G}_v , que par l'abscisse de convergence μ . Il est clair qu'on aurait pu raisonner de même avec un nombre μ' supérieur à μ et à $\mathcal{R}(n - \rho)$ quel que soit ρ dans Γ . Les \bar{G}_v obtenus auraient été complètement indépendants de ρ dans Γ , de sorte que les inégalités $|G_v| < \bar{G}_v$ auraient entraîné la convergence uniforme de la série.

17. Cette propriété de la série (41) nous permet de la dériver terme à terme par rapport à ρ . En posant

$$v^{(s)}(x, \rho) = \frac{\partial^s v(x, \rho)}{\partial \rho^s}, \quad u^{(s)}(x, \rho) = \frac{\partial^s u(x, \rho)}{\partial \rho^s},$$

on obtient les séries (1)

$$(42) \quad v^{(s)}(x, \rho) = G_0^{(s)}(\rho) + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{G_{v+1}^{(s)}(\rho) - v G_v^{(s)}(\rho)}{x(x+1) \dots (x+v)} \quad (s = 0, 1, 2, \dots),$$

et

$$(43) \quad u^{(s)}(x, \rho) = \sum_{t=0}^s \binom{s}{t} \frac{\partial^t}{\partial \rho^t} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \right) v^{(s-t)}(x, \rho)$$

vérifie l'équation

$$(44) \quad P(u^{(s)}(x, \rho)) = \frac{\partial^s}{\partial \rho^s} \left(g_0(\rho) f_0(\rho) \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \right) \quad (s = 0, 1, 2, \dots),$$

Ces dérivées fournissent un système fondamental de solutions de l'équation (3). Reprenons l'équation déterminante de cette équation, et groupons ses racines de manière que chaque groupe soit constitué par les racines qui ne diffèrent que d'un entier. Supposons que $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{m-1}$ forment un tel groupe, avec

$$\mathcal{R}(\rho_0) \geq \mathcal{R}(\rho_1) \geq \dots \geq \mathcal{R}(\rho_{m-1}),$$

et soient $\rho_0, \rho_i, \rho_j, \rho_k, \dots, \rho_l$ celles de ces racines qui sont distinctes. ρ_0 est ainsi une racine d'ordre i , ρ_i est d'ordre $j - i$, ρ_j d'ordre $k - j$, etc., et l'on peut former, avec les racines égales entre elles, les

(1) Les $G_v^{(s)}(\rho)$ sont ici les dérivées des $G_v(\rho)$ ($v = 0, 1, 2, \dots$).

sous-groupes $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{i-1}; \rho_i, \rho_{i+1}, \dots, \rho_{j-1}; \dots$. L'expression (11) choisie pour $g_0(\rho)$ s'écrit alors

$$g_0(\rho) = (\rho - \rho_i)^i (\rho - \rho_j)^j \dots (\rho - \rho_l)^l C_1(\rho),$$

$C_1(\rho)$ ne s'annulant pas pour les racines du groupe considéré, et, par suite,

$$f_0(\rho) g_0(\rho) = (\rho - \rho_0)^i (\rho - \rho_i)^j \dots (\rho - \rho_l)^m C_2(\rho),$$

$C_2(\rho)$ ayant la même propriété que $C_1(\rho)$. On voit donc que le second membre de l'équation (44) s'annule pour $\rho = \rho_s$, c'est-à-dire que l'équation homogène (3) admet les solutions

$$u(x, \rho_0), \quad u^{(1)}(x, \rho_1), \quad \dots, \quad u^{(m-1)}(x, \rho_{m-1}).$$

On obtient ainsi, correspondant chacune à chacune aux racines de l'équation déterminante, n solutions de l'équation (3); celles-ci sont donc rangées dans les mêmes groupes et sous-groupes que ces racines. Elles sont évidemment déterminées à des facteurs constants près. Nous allons montrer qu'elles constituent un système fondamental, et nous les appellerons le *système canonique de solutions* de (3).

Auparavant, remarquons que la transformation $(x, x + \rho)$ permet de ramener les développements des dérivées $v^{(s)}(x, \rho)$ à la forme initiale de la solution formelle, savoir

$$v^{(s)}(x, \rho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g_v^{(s)}(\rho)}{(x + \rho)(x + \rho + 1) \dots (x + \rho + \nu - 1)},$$

et nous savons que ces nouveaux développements convergeront pourvu que σ soit suffisamment grand. Ce sont d'ailleurs ces derniers développements qui se prêtent le plus aisément au calcul pratique de leurs coefficients.

18. En s'appuyant sur l'existence d'un développement de la forme

$$(45) \quad x\rho \frac{\partial^s}{\partial \rho^s} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho)} \right) = \Omega_0(x) + \Omega_1(x) \log \frac{1}{x} + \dots \\ + \Omega_{s-1} \log^{s-1} \frac{1}{x} + (1 + \Omega_s(x)) \log^s \frac{1}{x},$$

où les $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_s$ sont des séries de facultés convergentes pour $\Re(x) > 0$, $\Re(x + \rho) > 0$, on obtient pour les solutions cano-

niques (43) des développements de la forme

$$(46) \quad u^{(s)}(x, \rho) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\rho} \left\{ \varphi_{s,0}(x) + \varphi_{s,1}(x) \log \frac{1}{x} + \dots + \varphi_{s,s}(x) \log^s \frac{1}{x} \right\},$$

où $\varphi_{s,0}(x)$, $\varphi_{s,1}(x)$, \dots , $\varphi_{s,s}(x)$ admettent des développements (1)

$$(47) \quad \varphi_{s,t}(x) = \binom{s}{t} g_0^{(s-t)}(\rho) + \sum_{v=0}^t \frac{\varphi_{s,v}^{(t)}(\rho)}{x(x+1)\dots(x+v)} \quad (t = 0, 1, \dots, s).$$

Ces développements, étant des sommes de produits de séries (42) par des séries Ω , convergent d'ailleurs pour $\sigma > 0$, $\sigma > \mu - n$, c'est-à-dire $\sigma > 0$, $\sigma > \lambda' - n$, $\sigma > -\mathcal{R}(\rho)$.

Ces résultats fournissent les expressions asymptotiques de nos solutions canoniques, dans le demi-plan de convergence de ces séries de facultés. Nous nous bornerons au premier terme. Pour le premier sous-groupe ρ_0 , ρ_1 , \dots , ρ_{i-1} du groupe considéré plus haut, $g_0(\rho_0)$ étant différent de zéro, (46) et (47) donnent tout de suite

$$u^{(s)}(x, \rho_s) \sim g_0(\rho_0) \left(\frac{1}{x}\right)^{\rho_0} \log^s \frac{1}{x} \quad (s = 0, 1, \dots, i-1).$$

Pour le sous-groupe suivant, $\rho_i = \rho_{i+1} = \dots = \rho_{j-1}$, ρ_i étant i fois racine de $g_0(\rho)$, c'est le terme en $\varphi_{s,s-i}(x)$ qui l'emporte dans l'expression (46), donc

$$u^{(i+s)}(x, \rho_{i+s}) \sim \binom{i+s}{i} g_0^{(i)}(\rho_i) \left(\frac{1}{x}\right)^{\rho_i} \log^s \frac{1}{x} \quad (s = 0, 1, \dots, j-i-1).$$

On trouverait de même, pour le troisième sous-groupe,

$$u^{(j+s)}(x, \rho_{j+s}) \sim \binom{j+s}{s} g_0^{(j)}(\rho_j) \left(\frac{1}{x}\right)^{\rho_j} \log^s \frac{1}{x} \quad (s = 0, 1, \dots, k-j-1),$$

et ainsi de suite. On voit, en particulier, que deux solutions quelconques du même groupe sont telles que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u^{(t)}(x, \rho_t)}{u^{(s)}(x, \rho_s)} = 0$$

dans le demi-plan de convergence, quand $s > t$.

Plus généralement, il résulte de ces expressions asymptotiques que

(1) $g_0^{(s-t)}(\rho)$ désigne effectivement $\frac{\partial^{s-t} g_0(\rho)}{\partial \rho^{s-t}}$; on se rappellera, en effet, que $G_0 = g_0$.

l'on peut ranger les n solutions canoniques $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ dans un ordre tel que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u_i(x)}{u_{i+1}(x)} = 0,$$

sauf peut-être pour certains de ces rapports, qui cependant restent finis, relatifs à deux racines de même valeur réelle.

Supposons alors qu'il existe une relation linéaire

$$(48) \quad \sum_{i=1}^n \pi_i(x) u_i(x) = 0,$$

dont les coefficients $\pi_i(x)$ soient des fonctions périodiques qui ne s'annulent pas simultanément pour une valeur au moins de x . Soit a une telle valeur, et soit $\pi_m(x)$ le dernier de ces coefficients qui diffère de zéro en a . On déduirait, de (48),

$$(49) \quad \sum_{i=1}^{m-1} \pi_i(a) \frac{u_i(a+\nu)}{u_m(a+\nu)} + \pi_m(a) = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Si tous les rapports $\frac{u_i(x)}{u_{i+1}(x)}$ tendent vers zéro quand x augmente indéfiniment, ou, tout au moins, si ceux qui restent seulement finis prennent des ensembles de valeurs $\frac{u_i(a+\nu)}{u_{i+1}(a+\nu)}$ ayant une infinité de points limites, (49) conduit à une contradiction quand ν augmente indéfiniment. Avec ces hypothèses, nos solutions canoniques forment donc un système fondamental. C'est ce qui se produit, en particulier, si les racines distinctes de l'équation déterminante ont des parties réelles différentes.

Nous pouvons enfin résumer tous ces résultats dans l'énoncé suivant :

THÉORÈME I. — *Étant donnée une équation linéaire aux différences finies d'ordre n , de la forme*

$$P(u(x)) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (x-1)(x-2)\dots(x-i) q_i(x) \Delta_{-1}^i u(x) = 0,$$

où l'on suppose $q_n(x) = 1$ et les coefficients

$$q_i(x) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

représentables par des séries de facultés

$$q_i(x) = a_0^{(i)} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_s^{(i)}}{x(x+1)\dots(x+s-1)}$$

convergentes pour $\sigma > \lambda$, cette équation admet un système fondamental de n solutions de la forme

$$u^{(s)}(x, \rho_s) = \sum_{t=0}^s \binom{s}{t} \frac{\partial^t}{\partial \rho_s^t} \left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_s)} \right) v^{(s-t)}(x, \rho_s),$$

les $v^{(s-t)}(x, \rho_s)$ étant des fonctions développables en séries de facultés de la même forme que les $q_i(x)$; ces séries convergent pour $\Re(x+n) > \lambda$ et 0, $\Re(x+\rho_n) > 0$, en désignant par ρ_s les racines de l'équation déterminante.

La dernière condition de convergence obtenue s'explique si l'on remarque que $-\rho_n$ est en général un pôle de $v^{(n)}(x, \rho_n)$, sans quoi il annulerait $u^{(n)}(x, \rho_n)$, ce qui n'est pas généralement le cas. Nous verrons au paragraphe suivant que les deux autres conditions trouvées apparaissent également comme nécessaires. Les conditions de convergence énoncées dans ce théorème sont ainsi nécessaires et suffisantes, et fournissent généralement l'abscisse de convergence des séries obtenues.

II. — PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES.

19. Le prolongement analytique des solutions canoniques s'effectue en mettant l'équation (3) sous la forme (1) (Chap. I). Les équations réciproques de (4') (Chap. I)

$$p_i(x) = \sum_{s=0}^i \binom{n-s}{n-i} (-1)^{n-i} Q_{n-s}(x+n)$$

donnent

$$(50) \quad p_i(x) = \sum_{s=0}^i (-1)^{i-s} \binom{n-s}{n-i} (x+n-1)(x+n-2)\dots(x+s) q_{n-s}(x+n);$$

en particulier,

$$p_0(x) = x(x+1)\dots(x+n-1).$$

Les points α_s sont donc ici $0, -1, \dots, -n+1$; et les β_s sont les points singuliers (ici, points singuliers essentiels ou pôles) des $q_i(x+n)$. On a évidemment $\mathcal{R}(\beta_s+n) \leq \lambda'$, donc nos solutions canoniques pourront être prolongées analytiquement, à l'aide de l'équation

$$(51) \quad u(x) = - \sum_{i=1}^n \frac{p_i(x)}{x(x+1)\dots(x+n-1)} u(x+i),$$

à gauche de leur demi-plan de convergence, en tout point autre que les points $-\nu$ et les points $\beta_s - \nu$. Les premiers sont des pôles simples; quant aux seconds, on voit, de proche en proche, qu'en leur voisinage une solution canonique se comporte comme une fonction rationnelle entière des $p_i(x+\nu)$, à coefficients holomorphes au point en question.

Il résulte de ce raisonnement que si l'un des coefficients $q_i(x)$ admet un point singulier β' sur la droite de convergence $\sigma = \lambda$, les solutions canoniques admettent le point $\beta' - n$ comme point singulier, c'est-à-dire que les séries de facultés qui les représentent divergent pour $\sigma < \lambda - n$. En outre, $x=0$ est généralement un pôle; ces séries ne peuvent donc converger, en général, pour $\sigma + n < 0$. Cela explique les conditions de convergence obtenues au théorème I.

Bien entendu, le prolongement des solutions canoniques cesse d'être possible, et par suite ces solutions cessent d'exister, à gauche d'une droite $\sigma = \lambda_1 - n$, si les $q_i(x)$ admettent la coupure $\sigma = \lambda_1$.

Le prolongement analytique que nous venons de réaliser permet de ne conserver, dans les expressions asymptotiques du paragraphe précédent, que la condition $\mathcal{R}(x) > \lambda - n$, car il résulte de (50) que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p_i(x)}{p_0(x)} = (-1)^i \binom{n}{i},$$

donc

$$(52) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{p_i(x)}{p_0(x)} = -1,$$

et cela uniformément quand x tend vers l'infini dans un domaine $\sigma > \lambda - n + \varepsilon$, où ε est un nombre positif arbitraire.

En se rappelant comment se comporte à l'infini le reste d'une série

de facultés, ce raisonnement montre également que, si l'on pose

$$u(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \left[\sum_{s=0}^{\nu} \frac{g_s}{(x+\rho)(x+\rho+1)\dots(x+\rho+s-1)} + \frac{\varepsilon_{\nu}(x)}{x^{\nu}} \right],$$

$\varepsilon_{\nu}(x)$ tend uniformément vers zéro quand x tend vers l'infini de la manière susdite.

Nous avons ainsi établi le

THÉOREME II. — *Les n solutions canoniques obtenues au théorème I sont des fonctions analytiques, holomorphes dans le domaine $\sigma \geq \lambda - n$, sauf aux points $0, -1, -2 \dots$ qui peuvent s'y trouver, et qui sont des pôles simples. Chaque solution canonique $u_i(x)$ est telle qu'il existe un nombre ρ et un entier non négatif s tels que l'on ait, uniformément dans le domaine $\sigma > \lambda - n + \varepsilon$,*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u_i(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\rho} \log^s \frac{1}{x}} = k,$$

k étant une constante non nulle.

Dans le cas particulier où les $q_i(x)$ sont holomorphes à l'infini, on peut aller plus loin. Traçons un cercle de centre $x=0$ et de rayon R assez grand pour que ces coefficients soient holomorphes à l'extérieur de ce cercle. Soit C la bande limitée par les droites $\sigma=R, \tau=R, \tau=-R$ et contenant l'axe des nombres négatifs. Nos solutions canoniques sont holomorphes hors de cette bande, en tout point à distance finie. En prolongeant analytiquement les $u_i(x)$ et les $q_i(x)$ le long d'un chemin extérieur à C , on voit que (52) subsiste le long de toute droite $\sigma=c$, aussi petit que soit c , et, par suite, que les expressions asymptotiques des $u_i(x)$ sont encore vraies le long de toute demi-droite $\sigma=c, \tau > R$ ou $\sigma=c, \tau < -R$.

20. Les équations de la forme (3) constituent la classe la plus générale des équations aux différences finies qui admettent un système fondamental de solutions de la forme obtenue ici. C'est ce qu'on voit (1) en substituant les développements de ces solutions dans le

(1) Cf. N. E. NÖRLUND, *Sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies par des séries de facultés* (Rend. Circ. mat. Palermo, t. XXXV, 1912, p. 26-31).

déterminant formé au paragraphe 3. Nous nous contenterons ici d'énoncer cette propriété caractéristique.

THÉOREME III. — *Si une équation linéaire aux différences finies, d'ordre n , admet un système fondamental de solutions de la forme (43), les séries de facultés qui entrent dans leurs expressions étant convergentes pour $\sigma > \lambda - n$, cette équation peut se mettre sous la forme normale (3), où les séries de facultés des coefficients $q_i(x)$ sont convergentes pour $\sigma > \lambda$, $\sigma > 0$, et où $q_n(\infty) \neq 0$.*

21. Les raisonnements précédents peuvent être appliqués à une équation linéaire aux différences susceptible de prendre la deuxième forme normale

$$(53) \quad P(u(x)) = \sum_{i=0}^n P_i(x) \Delta_1^i u(x) = 0,$$

c'est-à-dire où les $P_i(x)$ admettraient une représentation de la forme

$$(54) \quad P_i(x) = \sum_{s=i}^1 b_s^{(i)} x(x+1) \dots (x+s-1) + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_s^{(i)}}{(x-1)(x-2) \dots (x-s)} \\ = (-1)^i x(x+1) \dots (x+i-1) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s^{(i)}}{(x-1)(x-2) \dots (x-s)},$$

On démontrerait de la même manière l'existence d'une solution

$$(55) \quad u(x) = \frac{\Gamma(1-x)}{\Gamma(1-x+\rho)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g_{\nu}}{(x-\rho-1)(x-\rho-2) \dots (x-\rho-\nu)},$$

ρ étant solution d'une équation déterminante. On définirait de même un système fondamental de solutions, dites *canoniques*, représentables par des séries de facultés dans un demi-plan limité à droite. Ces solutions se présenteront sous la forme

$$u^{(s)}(x, \rho_s) = \sum_{t=0}^s \binom{s}{t} \frac{\partial^t}{\partial \rho_s^t} \left(\frac{\Gamma(1-x)}{\Gamma(1-x+\rho_s)} \right) \nu^{(s-t)}(x, \rho_s),$$

où les $\nu^{(s-t)}(x, \rho_s)$ sont représentables par des séries de facultés, de

même forme que les coefficients

$$p_i(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s^{(i)}}{(x-1)(x-2)\dots(x-s)},$$

et convergentes pour $\sigma < \lambda + n$, $\sigma < n + 1$, $\sigma < \mathcal{R}(1 + \rho_n)$, si λ désigne la plus petite des abscisses de convergence des $p_i(x)$, et ρ_n la racine de l'équation déterminante dont la partie réelle est la plus petite.

Enfin, quand x s'éloigne à l'infini dans le domaine $\sigma < \lambda + n$, il existe un entier non négatif s tel que l'on ait

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u^{(i)}(x, \rho_s)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\rho_s} \log^s \frac{1}{x}} = \text{const.}$$

Il peut arriver qu'une équation admette les deux formes normales (3) et (53). C'est ce qui se produit, par exemple, si les $\frac{P_i(x)}{x^i}$ sont holomorphes à l'infini. On sait déduire alors les développements des $P_i(x)$ de ceux des $Q_i(x+n)$ grâce aux transformations linéaires successives $(x, x-n)$, $(x, -x)$, $(x, x-1)$ des séries de facultés. Les termes constants n'étant pas modifiés, les deux formes normales ont la même équation déterminante.

III. — RELATIONS LINÉAIRES ENTRE LES DEUX SYSTÈMES CANONIQUES DE SOLUTIONS.

22. La remarque faite à la fin du dernier paragraphe va nous permettre d'étudier d'une manière plus complète la manière dont se comportent, à l'infini, les solutions canoniques, dans le cas où les coefficients $q_i(x)$ de l'équation aux différences sont holomorphes à l'infini. Nous savons déjà que les solutions canoniques $u_i(x)$ de la première forme normale sont holomorphes en tout point à distance finie extérieur à la bande C définie au paragraphe 19; nous savons également comment elles se comportent quand x tend vers l'infini le long de toute demi-droite faisant avec l'axe des nombres positifs un angle $\leq \frac{\pi}{2}$.

D'autre part, les solutions canoniques $\bar{u}_i(x)$ de la deuxième forme normale de cette équation auront des propriétés analogues, mais du côté de l'infini négatif. Enfin, les $u_i(x)$ sont des formes linéaires, à coefficients périodiques, des $\bar{u}_h(x)$,

$$(56) \quad u_i(x) = \sum_{n=1}^n \Pi_{i,h}(x) \bar{u}_h(x).$$

On prévoit donc que l'on saura comment les $u_i(x)$ se comportent asymptotiquement dans une direction faisant avec l'axe positif un angle supérieur à $\frac{\pi}{2}$, quand on aura déterminé les valeurs asymptotiques des $\Pi_{i,h}(x)$.

23. Nous utiliserons, dans cette étude, la remarque suivante. Si la somme $\Omega(x)$ d'une série de facultés est holomorphe à l'infini, elle est représentable par deux développements de la forme

$$(57) \quad \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_s \rho(\rho+1) \dots (\rho+s-1)}{(x+\rho)(x+\rho+1) \dots (x+\rho+s)},$$

où ρ est un nombre quelconque, et

$$(58) \quad \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s \rho(\rho+1) \dots (\rho+s-1)}{x(x-1) \dots (x-s)}.$$

La première série converge pour $\sigma > \lambda$, la deuxième pour $\sigma < \lambda_1$, λ étant l'abscisse du point singulier le plus à droite, et λ_1 celle du point singulier le plus à gauche. Si l'on pose

$$(59) \quad \Omega(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s \rho(\rho+1) \dots (\rho+s-1)}{x(x-1) \dots (x-s)} + R_v(x),$$

$R_v(x)$ est holomorphe à l'infini, donc la relation

$$(60) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^v R_v(x) = 0,$$

qui est toujours vraie dans un demi-plan limité à droite, l'est ici dans toute direction du plan. D'autre part, la somme au second membre de (59) peut être mise sous la forme (57), à l'aide de l'identité,

valable pour $\sigma > 0$,

$$(61) \quad \frac{s!}{x(x-1)\dots(x-s)} \\ = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(\rho+s)(\rho+s+1)\dots(\rho+s+t-1)(t+1)(t+2)\dots(t+s)}{(x+\rho)(x+\rho+1)\dots(x+\rho+s+t)},$$

que l'on obtient en effectuant l'opération Δ_{-1}^s sur les deux membres de l'identité

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+\rho+s} + \frac{\rho+s}{(x+\rho+s)(x+\rho+s+1)} \\ + \frac{(\rho+s)(\rho+s+1)}{(x+\rho+s)(x+\rho+s+1)(x+\rho+s+2)} + \dots$$

En substituant les développements (61) à chacun des termes de la somme en question, et ne conservant que les $\nu+1$ premiers termes de la série obtenue, il vient

$$(62) \quad \Omega(x) = \sum_{s=0}^{\nu} \frac{\rho(\rho+1)\dots(\rho+s-1) \sum_{t=0}^s \binom{s}{t} B_t}{(x+\rho)(x+\rho+1)\dots(x+\rho+s)} + R'_{\nu}(x),$$

où $R'_{\nu}(x)$ possède la propriété asymptotique (60). Cette propriété appartenant aussi au reste de même rang de la série (57), la somme au second membre de (62) doit être identique à la somme analogue de cette série. L'identification des coefficients fournit, entre les coefficients A_s et B_s les relations remarquables

$$(63) \quad A_s = \sum_{t=0}^s \binom{s}{t} B_t;$$

ceci exprime encore que B_s est la différence des nombres A_0, A_1, \dots, A_s .

La réciproque de ce résultat n'est pas exacte, c'est-à-dire que si deux séries de facultés $\Omega_1(x)$ et $\Omega_2(x)$ telles que (57) et (58) convergent, la première pour $\sigma > \lambda$, la deuxième pour $\sigma < \lambda_1$, et ont leurs coefficients liés par (63), elles ne sont pas nécessairement le prolongement analytique l'une de l'autre. Mais supposons qu'il existe une bande $\lambda \leq \sigma \leq b$ dans laquelle $\Omega_2(x)$ puisse être prolongée, et où (60) soit encore valable. Le raisonnement précédent montre que,

dans ces conditions,

$$x^{\nu}(\Omega_1(x) - \Omega_2(x))$$

tend vers zéro quand x s'éloigne à l'infini dans cette bande, et cela quelque grand que soit l'entier positif ν .

24. Ceci établi, écrivons les deuxièmes solutions canoniques (55) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \overline{u}(x, \rho) &= \frac{\Gamma(1-x-\rho)}{\Gamma(1-x)} \frac{(\Gamma(1-x))^2}{\Gamma(1-x-\rho)\Gamma(1-x-\rho)} \\ &\times \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g_{\nu}}{(x-\rho-1)(x-\rho-2)\dots(x-\rho-\nu)}; \end{aligned}$$

le second facteur est représentable par une série de facultés, donc il en est de même de son produit par la série suivante; une transformation linéaire permet enfin de donner à ce produit la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g_{\nu} \rho(\rho+1)\dots(\rho+\nu-1)}{(x-1)(x-2)\dots(x-\nu)}.$$

Nous pouvons donc développer ces solutions canoniques sous la forme

$$(64) \quad \overline{u}(x, \rho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \overline{g_{\nu}} \rho(\rho+1)\dots(\rho+\nu-1) \frac{\Gamma(1-x-\rho)}{\Gamma(\nu+1-x)}.$$

Écrivons que (64) vérifie formellement la première forme normale de notre équation. On vérifie tout d'abord par récurrence que

$$\Delta_{-1}^i \frac{\Gamma(1-x-\rho)}{\Gamma(\nu+1-x)} = (\rho+\nu)(\rho+\nu+1)\dots(\rho+\nu+i-1) \frac{\Gamma(1-x-\rho)}{\Gamma(\nu+1+i-x)},$$

de sorte que la substitution du développement (64) dans (3) donne

$$(65) \quad \sum_{i=0}^n \rho(\rho+1)\dots(\rho+i) q_i(x) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\overline{g_{\nu}}(\rho+i+1)(\rho+i+2)\dots(\rho+i+\nu-1)}{(x-i-1)(x-i-2)\dots(x-i-\nu)} = 0.$$

Or il résulte des remarques du paragraphe précédent que nous ne changeons pas les relations formelles cherchées, en remplaçant la dernière somme de (65) par

$$\overline{g_0} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g'_{i+\nu}(\rho+i+1)(\rho+i+2)\dots(\rho+i+\nu)}{(x+\rho)(x+\rho+1)\dots(x+\rho+\nu)},$$

$\overline{g}_{1+\nu}$ étant la différence de $g'_1, g'_2, \dots, g'_{1+\nu}$. En posant $g'_0 = \overline{g}_0$, (65) devient ainsi

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\rho(\rho+1)\dots(\rho+i+\nu-1) g'_\nu q_i(x)}{(x+\rho)(x+\rho+1)\dots(x+\rho+\nu-1)} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g'_\nu \rho(\rho+1)\dots(\rho+\nu-1) f(x, \rho+\nu)}{(x+\rho)(x+\rho+1)\dots(x+\rho+\nu-1)} = 0, \end{aligned}$$

où $f(x, \rho+\nu)$ a la même signification qu'au paragraphe 15, et, par suite, en remplaçant $f(x, \rho-\nu)$ par son développement (7) (§ 13),

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\nu} \frac{\rho(\rho+1)\dots(\rho+s-1) g'_s f_{\nu-s}(\rho+s)}{(x+\rho)(x+\rho+1)\dots(x+\rho+\nu-1)} = 0.$$

On obtient donc, pour déterminer les g'_s les relations de récurrence

$$\sum_{s=0}^{\nu} \rho(\rho+1)\dots(\rho+s-1) g'_s f_{\nu-s}(\rho+s) = 0 \quad (g'_0 = \overline{g}_0),$$

qui ne sont rien autre que les relations (9) où l'on poserait

$$g'_s = \rho(\rho+1)\dots(\rho+s-1) g'_s.$$

Nous avons donc démontré le

THÉORÈME IV. — Une équation aux différences finies de la forme

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i (x-1)(x-2)\dots(x-i) q_i(x) \Delta_{-1}^i u(x) = 0,$$

dans laquelle $q_n(x) = 1$ et les coefficients $q_1(x), q_2(x), \dots, q_{n-1}(x)$ sont holomorphes à l'infini, admet une solution de la forme

$$(66) \quad u(x, \rho) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g_\nu \rho(\rho+1)\dots(\rho+\nu-1)}{(x+\rho)(x+\rho+1)\dots(x+\rho+\nu-1)},$$

et une autre solution de la forme

$$(67) \quad \overline{u}(x, \rho) = \frac{\Gamma(1-x-\rho)}{\Gamma(1-x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\overline{g}_\nu \rho(\rho+1)\dots(\rho+\nu-1)}{(x-1)(x-2)\dots(x-\nu)},$$

où $\bar{g}_0 = g_0$, et où les nombres $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3, \dots$ sont les différences successives des nombres g_1, g_2, g_3, \dots , c'est-à-dire que

$$g_{1+v} = \sum_{s=0}^v \binom{v}{s} \bar{g}_{1+s} \quad (v=0, 1, 2, \dots).$$

25. Si les racines $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ de l'équation déterminante sont distinctes, et si aucune de leurs différences n'est un nombre entier, les deux systèmes canoniques de solutions seront

$$u_s(x) = u(x, \rho_s) \quad \text{et} \quad \bar{u}_s(x) = \bar{u}(x, \rho_s) \quad (s=1, 2, \dots, n)$$

de la forme (66) et (67). Rappelons également que toutes leurs singularités sont dans une bande $-R \leq \tau \leq R$.

Si l'on pose

$$D(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & \bar{u}_2(x) & \dots & \bar{u}_n(x) \\ \Delta \bar{u}_1(x) & \Delta \bar{u}_2(x) & \dots & \Delta \bar{u}_n(x) \\ -1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta \bar{u}_1(x) & \Delta \bar{u}_2(x) & \dots & \Delta \bar{u}_n(x) \\ -1 & -1 & \dots & -1 \end{vmatrix},$$

et si l'on désigne par $D_{i,h}(x)$ le déterminant obtenu en remplaçant, dans $D(x)$, les $\bar{u}_h(x)$ par $u_i(x)$, le coefficient $\Pi_{i,h}(x)$ de la relation (56) est évidemment

$$(68) \quad \Pi_{i,h}(x) = \frac{D_{i,h}(x)}{D(x)}.$$

De l'holomorphie des solutions canoniques, et du fait que les $\bar{u}_s(x)$ forment un système fondamental, il résulte que $\Pi_{i,h}(x)$ est holomorphe en tout point à distance finie extérieur à la bande en question. Pour déterminer son expression asymptotique à l'infini, il suffit de se placer dans une bande $\alpha \leq \sigma \leq \alpha + 1$, $\tau > R$ ou $\tau < -R$, du domaine de convergence des $\bar{u}_s(x)$. On peut donc remplacer, dans les deux déterminants de (68), les $\bar{u}_s(x)$ par leurs développements (67) en série de facultés, et $u_i(x)$ par son développement limité

$$(69) \quad u_i(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_i)} \left[\sum_{s=0}^{\nu} \frac{g_s \rho_i! (\rho_i + 1) \dots (\rho_i + s - 1)}{(x + \rho_i)(x + \rho_i + 1) \dots (x + \rho_i + s - 1)} + \frac{\varepsilon_\nu(x)}{x^\nu} \right];$$

et l'on sait que $\varepsilon_\nu(x)$ tend uniformément vers zéro quand x tend vers l'infini dans cette bande. On voit alors aisément que, au facteur $\frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(x+\rho_i)\Gamma(1-x-\rho_h)}$ près, $\frac{D_{i,h}(x)}{D(x)}$ peut s'écrire comme le quotient de deux déterminants qui restent finis. Le déterminant au dénominateur tend vers

$$g_0(\rho_1)g_0(\rho_2)\dots g_0(\rho_n) \begin{vmatrix} 1 & & \dots & 1 \\ \rho_1 & & \dots & \rho_n \\ \rho_1(\rho_1+1) & & \dots & \rho_n(\rho_n+1) \\ \dots & & \dots & \dots \\ \rho_1(\rho_1+1)\dots(\rho_1+n-2) & \dots & \rho_n(\rho_n+1)\dots(\rho_n+n-2) \end{vmatrix},$$

qui n'est pas nul. Si $i=h$, le déterminant au numérateur tend vers la même expression, donc

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \Pi_{h,h}(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(x+\rho_h)\Gamma(1-x-\rho_h)},$$

et par suite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \Pi_{h,h}(x) &= e^{-\pi i \rho_h}, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \Pi_{h,h}(x) &= e^{\pi i \rho_h}. \end{aligned}$$

Si $i \neq h$, remarquons que le crochet de (69), pour les très grandes valeurs de x , ne diffère de la quantité analogue que fournirait (67) pour $\bar{u}_i(x)$ que d'un infiniment petit d'ordre supérieur à toute puissance de x ⁽¹⁾, donc le numérateur du quotient en question, qui se réduit à zéro quand on fait cette substitution, est un infiniment petit d'ordre supérieur à toute puissance de x . Le facteur

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(x+\rho_i)\Gamma(1-x-\rho_h)}$$

étant d'ordre fini par rapport à x , on a donc, quel que soit ν positif,

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^\nu \Pi_{i,h}(x) = 0 \quad (i \neq h).$$

En posant $e^{2\pi i x} = z$, on voit que $\Pi_{i,h}(x)$ est une fonction analytique de z , holomorphe au voisinage de $z=0$ et de $z=\infty$, ces points n'étant des zéros que si $i \neq h$.

(1) C'est une conséquence de la propriété de $\varepsilon_\nu(x)$ et du raisonnement fait à la fin du paragraphe 23.

En appliquant ces résultats au problème que nous avons en vue, nous pouvons conclure de (56) que, si x tend vers l'infini le long d'une demi-droite extérieure à la bande $-\mathbf{R} < \tau < \mathbf{R}$, et faisant avec l'axe positif un angle supérieur à $\frac{\pi}{2}$ mais inférieur à π ,

$$(70) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\rho_i} u_i(x) = g_0(\rho_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

C'est l'expression asymptotique trouvée pour une direction d'argument $\leq \frac{\pi}{2}$. Donc, avec les hypothèses faites sur les $q_i(x)$ et les ρ_i , l'expression asymptotique (70) est valable quand x s'éloigne à l'infini le long de toute demi-droite extérieure à la bande C, qui fait avec l'axe positif un angle inférieur à π .

CHAPITRE III.

APPLICATION DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE AUX
ÉQUATIONS LINÉAIRES DONT LES COEFFICIENTS SONT
DES POLYNOMES ⁽¹⁾.

I. — FORMATION DE DEUX SYSTÈMES DE SOLUTIONS CANONIQUES.

26. Une autre classe d'équations aux différences qui sont susceptibles d'une étude assez complète sont les équations à coefficients rationnels

$$(1) \quad P(u(x)) = \sum_{i=0}^n p_i(x) u(x+i) = 0,$$

dont les coefficients $p_i(x)$, supposés réduits à des polynomes, sont tels que leur degré maximum soit effectivement celui des coefficients extrêmes $p_0(x)$ et $p_n(x)$. Si nous désignons par p ce degré maximum, nous pouvons donc poser

$$(2) \quad p_i(x) = \sum_{s=0}^p C_{i,s}(x+i)(x+i+1)\dots(x+i+s-1) \quad (i=0, 1, \dots, n),$$

avec $C_{0,p} \neq 0$, $C_{n,p} \neq 0$. Les $C_{i,s}$ sont d'ailleurs des nombres complexes quelconques.

(1) P.-S. LAPLACE, *Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres* [Mém. Acad. Sc., 1782 (1785), p. 1-88; 1783 (1786), p. 423-467; Œuvres, t. X, p. 209-338 (Paris, 1894); *Théorie analytique des probabilités* (Paris, 1812); Œuvres, t. VII, p. 7-180 et 471-493 (Paris, 1886)]. — H. POINCARÉ, *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (Amer. Journ. Math., t. VII, 1885, p. 213-217 et p. 237-258). — S. PINCHERLE, *Sopra una trasformazione delle equazioni differenziali lineari in equazioni alle differenze e vice-versa* (Rend. Ist. Lomb., 2^e série, t. XIX, 1886, p. 559-562); *Sur la génération de systèmes récurrents au moyen d'une équation linéaire différentielle* (Acta math., t. XVI, 1892, p. 341-363).

Cherchons à satisfaire à l'équation (1) avec une intégrale de Laplace

$$(3) \quad u(x) = \int_L t^{x-1} v(t) dt$$

dont la fonction génératrice $v(t)$ et le chemin L seront convenablement choisis. En intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} & x(x+1) \dots (x+s-1) u(x) \\ &= \left[\sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k (x+k+1)(x+k+2) \dots (x+s-1) t^{x+k} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \right]_L \\ &+ (-1)^s \int_L t^{x+s-1} \frac{d^s v(t)}{dt^s} dt; \end{aligned}$$

et, par suite,

$$P(u(x)) = [V(x, t)]_L + \int_L t^{x-1} \sum_{s=0}^p (-t)^s \Phi_s(t) \frac{d^s v(t)}{dt^s} dt,$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \Phi_s(t) &= \sum_{i=0}^n C_{i,s} t^i, \\ V(x, t) &= \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{p-s-1} (-1)^s \frac{d^s v(t)}{dt^s} \frac{d^k (t^{x+s+k} \Phi_{s+k+1}(t))}{dt^k}. \end{aligned}$$

(3) sera donc une solution de (1) si l'on prend pour $v(t)$ une intégrale de l'équation différentielle

$$(4) \quad \sum_{s=0}^p (-t)^s \Phi_s(t) \frac{d^s v(t)}{dt^s} = 0,$$

et si $V(t)$ prend la même valeur aux deux extrémités de la ligne L . Nous appellerons $\Phi_p(t) = 0$ l'équation caractéristique de (1); ses coefficients sont les coefficients des termes de degré p dans les polynômes $p_i(x)$; elle a donc effectivement n racines, toutes différentes de zéro. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ces racines, et, en posant

$$\alpha_k = r_k e^{i\zeta_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

supposons qu'on les ait numérotées de façon que

$$0 \leq \zeta_1 \leq \zeta_2 \leq \dots \leq \zeta_n < 2\pi,$$

avec $r_i \leq r_{i+1}$ si $\zeta_i = \zeta_{i+1}$.

27. Les points singuliers de (4) sont les points $t = 0$, $t = \infty$ et les α_i ; les deux premiers sont réguliers; il en est de même des α_i pourvu que, si α_i est un zéro d'ordre k de $\Phi_p(t)$, il soit un zéro de $\Phi_{p-s}(t)$ d'ordre supérieur ou égal à $k - s$, et cela pour $s = 0, 1, \dots, k - 1$. C'est ce que nous supposons.

L'équation déterminante relative à $t = 0$ est

$$(5) \quad \sum_{s=0}^p (-1)^s C_{0,s} z(z-1)\dots(z-s+1) \equiv p_0(-z) = 0,$$

donc, si les p zéros de $p_0(x)$ sont désignés, avec la notation adoptée au Chapitre I, par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, l'équation (4) admet, au voisinage de $t = 0$, p solutions de la forme

$$(6) \quad v_{s,0} = \frac{\partial^r (t^{-\alpha_s} \psi(t))}{\partial (-\alpha_s)^r} = t^{-\alpha_s} (\psi_0(t) + \psi_1(t) \log t + \dots + \psi_r(t) \log^r t) \\ (s = 1, 2, \dots, p),$$

les fonctions $\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_r(t)$ étant holomorphes en ce point. Ces p solutions correspondent chacune à l'un des $(-\alpha_s)$, supposés rangés en groupes et sous-groupes suivant la méthode de Frobenius, comme nous l'avons déjà fait pour les ρ_i au paragraphe 17. En particulier, α_1 est la racine de partie réelle minimum.

L'équation déterminante relative à $t = \infty$ étant

$$(7) \quad \sum_{s=0}^p (-1)^s C_{n,s} z(z-1)\dots(z-s+1) \equiv p_n(-z-n) = 0,$$

on conclut de même que l'équation (4) admet, au voisinage de ce point, p solutions de la forme

$$(8) \quad v_{s,\infty} = \frac{\partial^r (t^{-\gamma_s} \psi(t))}{\partial (\gamma_s)^r} = t^{-\gamma_s} \left(\psi_0(t) + \psi_1(t) \log \frac{1}{t} + \dots + \psi_r(t) \log^r \frac{1}{t} \right),$$

où les $\gamma_s (s = 1, 2, \dots, p)$ désignent les p zéros de $p_n(x - n)$, et $\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_r(t)$ étant des fonctions holomorphes à l'infini. Ici, γ_1 désigne la racine de partie réelle maximum.

Rappelons également que, dans les expressions (6) et (8), r désigne respectivement le nombre des racines $-\alpha_i$ et γ_i du même groupe que $-\alpha_s$ et γ_s et placées avant elles.

Enfin, l'équation déterminante relative à une racine α_i d'ordre k de $\Phi_p(t) = 0$ est

$$(9) \quad \sum_{s=0}^k \frac{(-\alpha_i)^{p-s}}{(k-s)!} \Phi_p^{k-s}(\alpha_i) z(z-1) \dots z-p+s+1 = 0,$$

de racines $\rho_{1,i}, \rho_{2,i}, \dots, \rho_{k,i}, 0, 1, \dots, p-k-1$. Il correspond à ces racines p solutions indépendantes $v_{1,i}, v_{2,i}, \dots, v_{p,i}$, dont les $p-k$ dernières sont holomorphes au point α_i . Les $\rho_{1,i}, \rho_{2,i}, \dots, \rho_{k,i}$ étant répartis en groupes et sous-groupes de Frobenius, les k premières solutions sont en général non holomorphes en α_i , et de la forme

$$(10) \quad v_{s,i} = \frac{\partial^r [(t-\alpha_i)^{\rho_{s,i}} \varphi(t)]}{\partial (\rho_{s,i})^r} \\ = (t-\alpha_i)^{\rho_{s,i}} (\varphi_0(t) + \varphi_1(t) \log(t-\alpha_i) + \dots + \varphi_r(t) \log^r(t-\alpha_i)),$$

$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_r(t)$ étant holomorphes en α_i , et r désignant le nombre des racines du même groupe que $\rho_{s,i}$ et placées avant lui. On sait en outre que, si $q+1$ désigne le rang de $\rho_{s,i}$ dans son sous-groupe, on a

$$\varphi_q(\alpha_i) \neq 0, \quad \varphi_{q+1}(\alpha_i) = \varphi_{q+2}(\alpha_i) = \dots = \varphi_r(\alpha_i) = 0.$$

28. Cela posé, traçons dans le plan les prolongements, jusqu'à l'infini, des rayons vecteurs joignant l'origine aux points $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, ainsi que le rayon vecteur $o\alpha_i$. Si $v_{s,i}$ est une solution non holomorphe au voisinage de α_i , la fonction $t^{x-1} v_{s,i}$ est holomorphe dans le plan ainsi découpé.

Soit l_i le lacet rectiligne d'origine $t=0$, qui tourne dans le sens direct autour de α_i , et considérons

$$(11) \quad u_{s,i}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_i} t^{x-1} v_{s,i} dt.$$

Cette intégrale est absolument convergente si $\Re(x-\alpha) > 0$, où α désigne le point le plus à droite des points α_s ; dans le même domaine $V(x, t)$ s'annule à l'origine. (11) définit donc une solution de (1) dans ce domaine. On peut définir ainsi, par des intégrales (11) ($i=1, 2, \dots, n$), un système de solutions $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ de notre équation.

On peut définir un deuxième système de solutions $\bar{u}_1(x)$, $\bar{u}_2(x)$, ..., $\bar{u}_n(x)$, à l'aide des lacets rectilignes L_i , issus du point à l'infini sur la coupure d'extrémité a_i , et tournant dans le sens direct autour de a_i . Si γ désigne le point le plus à gauche des γ_s , $V(x, t)$ s'annule aux deux extrémités de L_i pourvu que $\mathcal{R}(x - \gamma + n) < 0$. Mais, l'intégrale

$$(12) \quad \bar{u}_{s,i}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_i} t^{x-1} \varphi_{s,i} dt$$

étant absolument convergente pour $\mathcal{R}(x - \gamma) < 0$, les n intégrales telles que (12) définissent n solutions de (1) dans ce dernier domaine.

Pour définir complètement ces solutions, précisons que l'argument de $t - a_i$ croît de $\xi_i - \pi$ à $\xi_i + \pi$ le long de l_i , et de ξ_i à $\xi_i + 2\pi$ le long de L_i , l'argument de t étant ξ_i le long des parties rectilignes de ces lacets.

Les deux systèmes ainsi définis seront appelés respectivement *le premier et le deuxième système canonique de solutions* de (1). Dans ces deux systèmes, chaque solution correspond à un nombre $\rho_{s,i}$, de sorte que les n solutions sont rangées suivant les mêmes groupes et sous-groupes que ces nombres.

II. — DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE DE FACULTÉS.

29. Les solutions définies par les intégrales (11) et (12) peuvent être représentées par des séries de facultés. Supposons d'abord que $\varphi_{s,i}$ soit de la forme la plus simple

$$(13) \quad \varphi_{s,i} = (t - a_i)^{\rho_{s,i}} \varphi(t) \quad [\varphi(a_i) \neq 0].$$

$\varphi(t)$ est développable en série des puissances entières de $t - a_i$, mais cette série n'est pas nécessairement convergente le long de tout le chemin l_i ou L_i . Un premier changement de variable $t = a_i z$ remplace a_i par le point $z = 1$ et les lacets l_i et L_i par des lacets analogues l et L du plan de z , tournant autour de $z = 1$.

Considérons d'abord la solution canonique

$$u_{s,i}(x) = a_i^{x+\rho} \int_l z^{x-1} (z-1)^\rho \varphi(a_i z) dz,$$

où l'on a écrit ρ à la place de $\rho_{s,i}$ pour simplifier l'écriture. On sait qu'on peut généralement trouver un changement de variable $z = \xi^{\frac{1}{\omega}}$, où ω est un nombre positif assez grand, de manière que $\varphi(a_i \xi^{\frac{1}{\omega}})$, qui est holomorphe au point $\xi = 1$, le soit pour $|\xi - 1| \leq 1$, sauf au point $\xi = 0$, et cela sans que nous ayons à modifier le chemin l ⁽¹⁾. Il vient ainsi

$$u_{s,i}(x) = \frac{a_i^{x+\rho}}{\omega} \int_l \xi^{\frac{x}{\omega}-1} \left(\xi^{\frac{1}{\omega}} - 1 \right)^{\rho} \varphi \left(a_i \xi^{\frac{1}{\omega}} \right) d\xi.$$

La fonction

$$\frac{a_i^x}{\omega} \left(\frac{\xi^{\frac{1}{\omega}} - 1}{\xi - 1} \right)^{\rho} \varphi \left(a_i \xi^{\frac{1}{\omega}} \right)$$

étant holomorphe pour $|\xi - 1| \leq 1$, sauf pour $\xi = 0$, admet un développement

$$(14) \quad \frac{a_i^x}{\omega} \left(\frac{\xi^{\frac{1}{\omega}} - 1}{\xi - 1} \right)^{\rho} \varphi \left(a_i \xi^{\frac{1}{\omega}} \right) = \sum_{v=0}^{\infty} A_v (1 - \xi)^v,$$

où $A_0 = \frac{a_i^x \varphi(a_i)}{\omega \rho + 1}$ est différent de zéro. En substituant ce développement dans l'intégrale, et intégrant terme à terme le long de l , ce qui est maintenant possible, on a ⁽²⁾

$$u_{s,i}(x) = e^{-\pi i \rho} a_i^x \sum_{v=0}^{\infty} A_v \int_l \xi^{\frac{x}{\omega}-1} (1 - \xi)^{\rho+v} d\xi,$$

et, par suite,

$$(15) \quad u_{s,i}(x) = e^{-\pi i \rho} (1 - e^{2\pi i \rho}) a_i^x \sum_{v=0}^{\infty} A_v \frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right) \Gamma(\rho + v + 1)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega} + \rho + v + 1\right)}.$$

Pour la solution canonique du deuxième système

$$\bar{u}_{s,i}(x) = a_i^{x+\rho} \int_L z^{x-1} (z - 1)^{\rho} \varphi(a_i z) dz,$$

⁽¹⁾ Pour une étude détaillée de cette transformation, cf. N. E. NÖRLUND, *loc. cit.* (*Leçons sur les séries d'interpolation*, p. 198-206).

⁽²⁾ Le facteur $e^{-\pi i \rho}$ provient de ce que l'argument de $\xi - 1$ doit avoir la valeur $-\pi$ au début de l , d'après ce qui a été convenu à la fin du paragraphe précédent.

on ferait, de manière analogue, le changement de variable $z = (1 - \eta)^{-\frac{1}{\omega}}$; si ω est un nombre positif suffisamment grand, $\varphi(a_i z)$ est une fonction holomorphe de η pour $|\eta| \leq 1$, sauf $\eta = 1$, et le lacet L est remplacé par le lacet rectiligne L' , d'origine $\eta = 1$ et tournant dans le sens direct autour de $\eta = 0$. Il vient ainsi

$$\bar{u}_{s,i}(x) = \frac{\alpha_i^{x+\rho}}{\omega} \int_{L'} (1-\eta)^{-\frac{x}{\omega}-1} \left[(1-\eta)^{-\frac{1}{\omega}} - 1 \right]^\rho \varphi(a_i(1-\eta)^{-\frac{1}{\omega}}) d\eta;$$

on peut introduire le développement suivant, convergent le long de L' ,

$$(16) \quad \frac{\alpha_i^\rho}{\omega} \left[\frac{1-\eta}{\eta} \left((1-\eta)^{-\frac{1}{\omega}} - 1 \right) \right]^\rho \varphi(a_i(1-\eta)^{-\frac{1}{\omega}}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu B_\nu \eta^\nu,$$

et, en intégrant terme à terme, on trouve

$$\bar{u}_{s,i}(x) = \alpha_i^x \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu B_\nu \int_{L'} (1-\eta)^{-\frac{x}{\omega}-\rho-1} \eta^{\rho+\nu} d\eta,$$

et, par suite,

$$(17) \quad \bar{u}_{s,i}(x) = (e^{2\pi i \rho} - 1) \alpha_i^x \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu B_\nu \frac{\Gamma\left(-\frac{x}{\omega} - \rho\right) \Gamma(\rho + \nu + 1)}{\Gamma\left(-\frac{x}{\omega} - \rho + \nu + 1\right)}.$$

On remarquera que les premiers membres de (14) et (16) se déduisent l'un de l'autre par la transformation d'Euler $\xi = \frac{1}{1-\eta}$, donc $A_0 = B_0$, et B_1, B_2, B_3, \dots sont les différences successives des coefficients A_1, A_2, A_3, \dots .

Il résulte également de (14) que ces coefficients peuvent être déduits des coefficients de l'équation aux différences par des opérations algébriques.

En modifiant légèrement la signification des A_ν et des B_ν , nous avons ainsi démontré que les deux solutions canoniques relatives à $\rho_{s,i}$ peuvent être représentées par les développements suivants, où ω désigne un même nombre positif suffisamment grand,

$$(18) \quad u_{s,i}(x) = \alpha_i^x \frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega} + \rho_{s,i} + 1\right)} \Omega(x, \rho_{s,i}),$$

où

$$(19) \quad \Omega(x, \rho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu} \frac{(\rho+1)(\rho+2)\dots(\rho+\nu)\omega^{\nu}}{(x+\omega\rho+\omega)(x+\omega\rho+2\omega)\dots(x+\omega\rho+\nu\omega)},$$

et

$$(20) \quad \bar{u}_{s,i}(x) = e^{\pi i(\rho_{s,i}+1)} \alpha_i^x \frac{\Gamma\left(-\frac{x}{\omega} - \rho_{s,i}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)} \bar{\Omega}(x, \rho_{s,i})$$

où

$$(21) \quad \bar{\Omega}(x, \rho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu} \frac{(\rho+1)(\rho+2)\dots(\rho+\nu)\omega^{\nu}}{(x-\omega)(x-2\omega)\dots(x-\nu\omega)}.$$

Dans ces développements, $A_0 = B_0 \neq 0$, et les coefficients B_1, B_2, B_3, \dots sont les différences successives des A_1, A_2, A_3, \dots .

Les séries de facultés au second membre de (19) et (21) étant respectivement convergentes pour $\Re(x - \alpha) > 0$ et $\Re(x - \gamma) < 0$, ces développements montrent que $u_{s,i}(x)$ et $\bar{u}_{s,i}(x)$ sont des fonctions analytiques, holomorphes respectivement dans ces deux domaines. En fait, la convergence uniforme de ces séries permet d'apprécier avec autant d'approximation qu'on veut comment ces solutions se comportent à l'infini, dans les domaines de convergence. En particulier, on voit qu'on aura, uniformément dans les domaines respectifs,

$$(22) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha_i^{-x} x^{\rho_{s,i}+1} u_{s,i}(x) = k \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \arg x \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

$$(23) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha_i^{-x} x^{\rho_{s,i}+1} \bar{u}_{s,i}(x) = k \quad \left(-\frac{3\pi}{2} \leq \arg x \leq -\frac{\pi}{2} \right),$$

k désignant une même constante, non nulle.

30. Considérons maintenant le cas où $\rho_{s,i}$ a la forme générale (10). Il résulte de cette expression, et de la convergence uniforme des intégrales (11) et (12) par rapport à ρ , que les solutions $u_{s,i}$ et $\bar{u}_{s,i}$ correspondantes s'expriment à l'aide des dérivées d'ordre r , par rapport à ρ , des fonctions de tête du groupe, donc de fonctions représentées par des développements de la forme (18) et (20).

La solution canonique du premier système sera

$$(24) \quad u_{s,i}(x) = \alpha_i^x \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \Omega_j(x, \rho_{s,i}) \frac{\partial^{r-j}}{\partial \rho_{s,i}^{r-j}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega} + \rho_{s,i} + 1\right)} \right),$$

$\Omega_j(x, \rho)$ étant la dérivée $j^{\text{ième}}$ de (19) par rapport à ρ . Chaque dérivation peut s'effectuer partiellement sur le coefficient A_j , le dénominateur, et le numérateur du terme général. La première de ces trois dérivations partielles donne une série de la forme (19), et de même domaine de convergence, car la série au second membre de (14) est uniformément convergente par rapport à ρ . Pour la deuxième dérivation partielle, (19) se comporte comme une série de facultés d'argument $\rho + \frac{x}{\omega} + 1$; on pourra donc représenter cette dérivée par une série de facultés semblable, convergente pour

$$\Re\left(\frac{x}{\omega} + \rho + 1\right) > 0, \quad \Re(x - \alpha) > 0.$$

Quant à la troisième dérivation partielle, elle revient à multiplier le terme général de (19) par $\frac{1}{\rho+1} + \frac{1}{\rho+2} + \dots + \frac{1}{\rho+v}$; la somme au premier membre de (14) (Chap. II) relative à cette série est donc inférieure à

$$v^{\lambda'+\varepsilon} \left| \frac{1}{\rho+1} + \frac{1}{\rho+2} + \dots + \frac{1}{\rho+v} \right| < C v^{\lambda'+\varepsilon} \log v,$$

où λ' désigne le plus grand des nombres 0 et $\lambda = \Re\left(\frac{x}{\omega} + \rho + 1\right)$.

Cette nouvelle série converge donc pour $\Re\left(\frac{x}{\omega} + \rho + 1\right) > \lambda'$. On voit ainsi que $\Omega_j(x, \rho)$ est elle-même une série de facultés de la forme (19), convergente dans ce domaine.

Enfin, par la transformation linéaire $(x, x - \omega\rho - \omega)$, on peut encore écrire

$$(25) \quad \Omega_j(x, \rho) = A_0^{(j)} + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{A_{1+v}^{(j)}}{x(x+\omega)\dots(x+v\omega)} \quad (j = 0, 1, \dots, r),$$

et ces séries de facultés seront convergentes pour

$$(26) \quad \Re(x - \alpha) > 0, \quad \Re\left(\frac{x}{\omega} + \rho + 1\right) > 0, \quad \Re(x) > 0.$$

Il résulte encore de cette démonstration et de la forme du terme constant A_0 de (19), qui s'annule, pour $\rho = \rho_{s,i}$, comme $(\rho - \rho_{s,i})^{r-q}$, où $r+1$ et $q+1$ désignent toujours les rangs de $\rho_{s,i}$ dans son groupe et dans son sous-groupe, que $A_0^{(j)} = \frac{d^j A_0}{d\rho^j}$ s'annulera comme $(\rho - \rho_{s,i})^{r-q-j}$;

on a donc $\Lambda_0^{(r-q)} \neq 0$, et

$$\Lambda_0^{(r-q-1)} = \Lambda_0^{(r-q+2)} = \dots = \Lambda_0^{(r)} = 0.$$

Cela posé, le développement (24) permet de calculer la valeur asymptotique de $u_{s,i}(x)$, par le même procédé qu'au paragraphe 18. La conclusion est d'ailleurs tout à fait analogue, au facteur a_i^r près, et l'on a

$$(27) \quad u_{s,i}(x) \sim k a_i^r \left(\frac{1}{x}\right)^{\rho_{s,i}+1} \log^q \frac{1}{x},$$

quand x tend vers l'infini à l'intérieur du domaine de convergence des séries (25). La constante k est essentiellement différente de zéro, et a la même valeur pour les éléments d'un sous-groupe.

31. Le raisonnement fait au paragraphe 18 nous permet alors de conclure que *nos n solutions canoniques forment un système fondamental*. En effet, il résulte de (27) que ces solutions $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ peuvent être rangées de façon que l'on ait

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u_h(x)}{u_{h+1}(x)} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n-1),$$

avec exception pour ceux de ces rapports dont les éléments a_i , $\rho_{s,i}$ et a_j , $\rho_{t,j}$ seraient tels que $|a_i| = |a_j|$ et $\mathcal{R}(\rho_{s,i}) = \mathcal{R}(\rho_{t,j})$, $\rho_{s,i}$ et $\rho_{t,j}$ occupant le même rang dans leurs sous-groupes respectifs. Dans ce dernier cas, (27) donne

$$\frac{u_{s,i}(x)}{u_{t,j}(x)} = \left(\frac{a_i}{a_j}\right)^x x^{\rho_{t,j}-\rho_{s,i}} \varphi(x) = e^{\sqrt{-1}(\gamma x + \delta \log x)} \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ tendant vers une limite finie et non nulle quand x tend vers l'infini, et $\gamma = \xi_i - \xi_j$ et $\delta = (\rho_{s,i} - \rho_{t,j})\sqrt{-1}$ étant des nombres réels. Les valeurs de ce rapport, relatives à un ensemble de points $a + \nu$, ont un ensemble dérivé possédant une infinité d'éléments, sauf si δ est nul, et γ commensurable avec 2π . La démonstration du paragraphe cité ne pourrait donc être en défaut que si les rapports $\frac{u_h(a + \nu)}{u_{h+1}(a + \nu)}$ qui ne tendent pas vers zéro étaient tous de la forme $K_h e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{p_h}{p}\nu}$, p_h et p étant des nombres entiers, avec $\frac{p_h}{p} < 1$, et K_h tendant vers une constante. Mais alors les rapports $\frac{u_i(a + \nu)}{u_m(a + \nu)}$

de l'équation (49) (§ 18) qui ne tendent pas vers zéro seraient de cette forme, les rapports $\frac{p_h}{p}$ correspondants, que l'on peut supposer réduits au même dénominateur, étant tous différents, et inférieurs à 1 ⁽¹⁾. Le nombre N de ces rapports est alors nécessairement inférieur à p , de sorte que, en donnant, à ν , $N + 1 \leq p$ valeurs entières successives, (49) (§ 18) entraînerait $\pi_m(\alpha) = 0$, donc, même dans ce cas, à une contradiction.

32. On trouve des résultats semblables pour les solutions $\bar{u}_{s,i}(x)$. Le même raisonnement montre qu'à la forme générale (10) de $\nu_{s,i}$ correspond

$$(28) \quad \bar{u}_{s,i}(x) = \alpha_i^r \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \bar{\Omega}_j(x, \varphi_{s,i}) \frac{\partial^{r-j}}{\partial \varphi_{s,i}^{r-j}} \left(\frac{\Gamma\left(-\frac{x}{\omega} - \varphi_{s,i}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)} \right),$$

où

$$(29) \quad \bar{\Omega}_j(x, \varphi) = B_0^{(j)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_{\nu}^{(j)}}{(x - \omega)(x - 2\omega) \dots (x - \nu\omega)},$$

ces séries de facultés étant convergentes pour

$$(30) \quad \Re(x - \gamma) < 0, \quad \Re(x - \omega) < 0.$$

Il résulte en outre de $A_0 = B_0$ que $A_0^{(j)} = B_0^{(j)}$.

Par conséquent, l'expression asymptotique (27) est également celle de $\bar{u}_{s,i}(x)$, quand x s'éloigne à l'infini à l'intérieur du demi-plan défini par (30), et cela avec la même constante k . On en conclut, en particulier, que *notre second système canonique de solutions est également un système fondamental*.

33. On peut donner de ces solutions des expressions légèrement différentes en substituant les développements (15) (Chap. II) dans les formules (24) et (28). En remplaçant les produits de séries de facultés par de nouvelles séries de facultés, il viendra par exemple

$$u_{s,i}(x) = \alpha_i^r \left(\frac{1}{x}\right)^{\varphi_{s,i}+1} \sum_{j=0}^r \Psi_j(x) \log^j \frac{1}{x},$$

⁽¹⁾ Ceci est une conséquence de ce que la somme de toutes les différences $\xi_i - \xi_j$ est inférieure à 2π .

les $\Psi_j(x)$ étant des séries de facultés de la forme (25), convergentes dans le demi-plan (26). Mais il convient de remarquer que le calcul effectif des coefficients est ici beaucoup plus difficile que pour les séries $\Omega_j(x)$.

34. Les considérations précédentes se trouvent en défaut si plusieurs points a_i sont sur le même rayon vecteur. Supposons qu'il en soit ainsi pour deux de ces points a_i et a_{i+1} . Les expressions (11) et (12) demeurent valables pourvu qu'on déforme les lacets l_{i+1} et L_i suivant des petits arcs de cercle évitant respectivement a_i et a_{i+1} . Mais les changements de variable $z = \xi^{\frac{1}{\omega}}$ et $z = (1 - \eta)^{-\frac{1}{\omega}}$ ne rendent possibles des développements en série entière (14) et (16) de rayon de convergence égal à 1 que si ω a un argument non nul. Tout en donnant à ω un tel argument, très petit, positif ou négatif, il suffira encore de lui choisir une valeur absolue suffisamment grande.

Dans ces conditions, on obtient des développements de la même forme que plus haut, mais où ω est un nombre complexe, et où, par suite, les conditions de convergence $\Re(x - \alpha) > 0$, $\Re(x - \gamma) < 0$ doivent être remplacées respectivement par

$$\Re\left(\frac{x - \alpha_s}{\omega}\right) > 0, \quad \Re\left(\frac{x - \gamma_s}{\omega}\right) < 0 \quad (s = 1, 2, \dots, p);$$

ce cas d'exception ne présente donc pas de difficultés.

35. Les solutions canoniques du premier système n'ont été définies jusqu'ici que dans le demi-plan $\Re(x - \alpha) > 0$, mais on peut les prolonger analytiquement à l'aide de l'équation aux différences, en appliquant, comme on l'a déjà fait au paragraphe 19, la méthode générale exposée au début de cet Ouvrage. Il résulte d'ailleurs des résultats obtenus dans le Chapitre I que les $u_{s,i}(x)$ sont des fonctions méromorphes ayant les seuls pôles $\alpha_s - \nu$.

De même les solutions $\bar{u}_{s,i}(x)$ sont prolongeables dans tout le plan, et leurs seuls points singuliers sont les pôles $\gamma_s + \nu$.

On peut encore se rendre compte de ceci en déduisant des intégrales de Laplace, par lesquelles ces solutions ont été définies, des développements en série de fractions rationnelles, valables dans tout domaine fini d'holomorphie. Considérons, par exemple, l'intégrale (11), et soit b un point du lacet l_i , plus rapproché de l'origine

que tous les points a_j . Le chemin d'intégration peut être décomposé en trois parties, dont l'une est le lacet l' d'origine b et entourant a_i , les deux autres étant le segment rectiligne ob parcouru dans un sens, puis dans l'autre. Le long de ces deux derniers chemins, la détermination de $v_{s,i}$ n'est pas la même, et, si l'on désigne respectivement par

$$\sum_{h=1}^p c_h v_{h,0} \quad \text{et} \quad \sum_{h=1}^p c'_h v_{h,0}$$

les déterminations initiale et finale, où c_h et c'_h sont certaines constantes, on peut écrire

$$u_{s,i}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l'} t^{x-1} v_{s,i} dt + \frac{1}{2\pi i} \sum_{h=1}^p (c_h - c'_h) \int_0^b t^{x-1} v_{h,0} dt.$$

En remplaçant les $v_{h,0}$ par leurs développements (6), et faisant le changement de variable (t, bt), la dernière intégrale s'écrit

$$b^{x-\alpha_h} \sum_{j=0}^r \int_0^1 t^{x-\alpha_h-1} \Psi_{h,j}(t) \log^j t dt,$$

les $\Psi_{h,j}(t)$ étant des formes linéaires des $\psi_s(t)$ de (6), et développables suivant des séries entières convergentes pour $|t| \leq 1$ et même hors de ce cercle, grâce au choix que nous avons fait de b ; dans ces développements

$$(31) \quad \Psi_{h,j}(t) = \sum_{v=0}^{\infty} A_{h,v}^{(j)} t^v \quad (h=1, 2, \dots, p; j=1, 2, \dots, r),$$

les $A_{h,0}^{(j)}$ d'indice h ne seront pas tous nuls. En intégrant terme à terme, compte tenu de

$$\int_0^1 t^z \log^j t dt = \frac{(-1)^j j!}{(z+1)^{j+1}} \quad [\Re(z+1) > 0],$$

on obtient donc, si $\Re(x-\alpha) > 0$,

$$u_{s,i}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l'} t^{x-1} v_{s,i} dt + \sum_{h=1}^p \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_h - c'_h}{2\pi i} b^{x-\alpha_h} \sum_{j=0}^r \frac{(-1)^j A_{h,v}^{(j)} j!}{(x-\alpha_h+v)^{j+1}}.$$

L'intégrale au second membre étant une fonction entière, les pôles

de $u_{s,i}(x)$ peuvent être ainsi étudiés. La série de fractions rationnelles obtenue est d'ailleurs convergente pourvu que x ne soit pas un pôle, car si R désigne le plus petit des rayons de convergence des séries (31), on a $R > 1$, et l'on peut trouver un nombre positif M tel que $|A_{h,s}^{(j)}| < \frac{M}{R^s}$. On voit ainsi, également, que la convergence est uniforme dans tout domaine fini du plan, dont seraient isolés au besoin, par des petits cercles, les points $\alpha_s - \nu$.

On pourrait obtenir un résultat analogue pour les solutions canoniques du deuxième système.

III. — LES RELATIONS LINÉAIRES ENTRE LES DEUX SYSTÈMES CANONIQUES.

36. On peut former les relations linéaires qui lient les deux systèmes canoniques de solutions, soit en déformant les contours d'intégration des intégrales de Laplace, soit par une méthode directe dont le principe a déjà été utilisé dans le Chapitre II. Exposons d'abord la première méthode.

Désignons par $v_{s,i}$, $v'_{s,i}$, $v''_{s,i}$, $v'''_{s,i}$ les branches de la fonction $v_{s,i}(t)$ où l'argument de $t - a_i$ est respectivement $\xi_i + \pi$, $\xi_i + 2\pi$, $\xi_i - \pi$, ξ_i , et par $v_{s,0}$, $v''_{s,0}$ les branches de $v_{s,0}(t)$ où l'argument de t a les valeurs respectives ξ_i , $\xi_i - 2\pi$.

Posons

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{s,i} = \sum_{h=1}^p c_{s,h} v_{h,0}, \quad v''_{s,i} = \sum_{h=1}^p c''_{s,h} v_{h,0}, \\ v_{h,0} = \sum_{l=1}^p d_{h,l} v_{l,i}. \end{array} \right.$$

On a donc

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{h=1}^p c_{s,h} d_{h,l} = \varepsilon_{s,l}, \\ \sum_{h=1}^p \sum_{l=1}^p c''_{s,h} d_{h,l} v_{l,i} = v''_{s,i}. \end{array} \right.$$

Plus généralement, si nous remarquons que, le rang d'une racine

$-\alpha_h$ dans son groupe étant $r+1$,

$$\varphi_{h,j,0} = \frac{\partial^{r-j}(t^{-\alpha_h} \psi(t))}{\partial(-\alpha_h)^{r-j}}$$

est une intégrale de l'équation différentielle (4), nous pourrions poser

$$(34) \quad \varphi_{h,j,0} = \frac{\partial^{r-j}(t^{-\alpha_h} \psi(t))}{\partial(-\alpha_h)^{r-j}} = \sum_{l=1}^p d_{h,j,l} \varphi_{l,i},$$

où l'on prend $\arg t = \xi_i$, de sorte que $d_{h,0,l} = d_{h,l}$. Désignons par $\varphi'_{h,j,0}$ la fonction obtenue en prolongeant analytiquement $\varphi_{h,j,0}$ par une rotation dans le sens direct autour de $t=0$, puis le long du bord droit du rayon vecteur $0a_i$ jusqu'au delà de a_i . On a

$$\begin{aligned} \varphi'_{h,j,0} &= \frac{\partial^{r-j}(e^{-2\pi i \alpha_h} t^{-\alpha_h} \psi(t))}{\partial(-\alpha_h)^{r-j}} \\ &= \sum_{m=0}^{r-j} \binom{r-j}{m} e^{-2\pi i \alpha_h (2\pi i)^m} \frac{\partial^{r-j-m}(t^{-\alpha_h} \psi(t))}{\partial(-\alpha_h)^{r-j-m}} \\ &= \sum_{m=j}^r \binom{r-j}{m-j} e^{-2\pi i \alpha_h (2\pi i)^{m-j}} \frac{\partial^{r-m}(t^{-\alpha_h} \psi(t))}{\partial(-\alpha_h)^{r-m}}, \end{aligned}$$

avec $\arg t = \xi_i$ et $\arg(t - a_i) = \xi_i + 2\pi$, et, par suite, d'après (34),

$$(35) \quad \varphi'_{h,j,0} = \sum_{l=1}^p \sum_{m=j}^r \binom{r-j}{m-j} e^{-2\pi i \alpha_h (2\pi i)^{m-j}} d_{h,m,l} \varphi'_{l,i}.$$

37. Ces remarques faites, supposons pour un moment que tous les $\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i}, \dots, \varphi_{p,i}$ aient leur partie réelle supérieure (1) à -1 . Nous pouvons alors remplacer l_i par le segment $0a_i$ parcouru dans les deux sens, ce qui donne

$$(36) \quad u_{s,i}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{a_i} t^{x-1} (\varphi''_{s,i} - \varphi_{s,i}) dt = \sum_{h=1}^p \frac{c''_{s,h} - c_{s,h}}{2\pi i} \int_0^{a_i} t^{x-1} \varphi_{h,0} dt.$$

On peut substituer à ce chemin le lacet rectiligne et direct C_i ,

(1) On remarquera que cette hypothèse est bien satisfaite pour les $p-k$ derniers, 0, 1, ..., $p-k-1$.

d'origine a_i , et tournant autour de $t = 0$. En effet, $v_{h-r,0}$ étant la fonction de tête du groupe auquel appartient $v_{h,0}$, on a

$$\int_0^{a_i} t^{x-1} v_{h-r,0} dt = \frac{1}{e^{2\pi i(x-\alpha_{h-r})} - 1} \int_{C_i} t^{x-\alpha_{h-r}-1} \psi(t) dt,$$

de sorte qu'en dérivant r fois par rapport à $(-\alpha_{h-r})$, et remplaçant ensuite α_{h-r} par α_h , il vient

$$\int_0^{a_i} t^{x-1} v_{h,0} dt = \int_{C_i} t^{x-1} \frac{\partial^r (t^{-\alpha_h} \psi(t) \mu_h)}{\partial(-\alpha_h)^r} dt,$$

où l'on a posé

$$\mu_h = \frac{1}{e^{2\pi i(x-\alpha_h)} - 1}.$$

Cette modification du chemin d'intégration transforme donc (36) en

$$\begin{aligned} (37) \quad u_{s,i}(x) &= \sum_{h=1}^p \frac{c''_{s,h} - c_{s,h}}{2\pi i} \int_{C_i} t^{x-1} \frac{\partial^r (t^{-\alpha_h} \psi(t) \mu_h)}{\partial(-\alpha_h)^r} dt \\ &= \sum_{h=1}^p \frac{c''_{s,h} - c_{s,h}}{2\pi i} \int_{C_i} t^{x-1} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \frac{\partial^j \mu_h}{\partial(-\alpha_h)^j} \frac{\partial^{r-j} (t^{-\alpha_h} \psi(t))}{\partial(-\alpha_h)^{r-j}} dt, \end{aligned}$$

avec $\arg t = \xi_i$, c'est-à-dire $\frac{\partial^{r-j} (t^{-\alpha_h} \psi(t))}{\partial(-\alpha_h)^{r-j}} = v_{h,j,0}$, le long de la première branche de C_i .

Remarquons que cette dernière expression de $u_{s,i}(x)$ conserve un sens pour $\Re(x - \alpha) < 0$, et réalise par suite le prolongement analytique de $u_{s,i}(x)$ dans toute région d'holomorphie.

Pour introduire maintenant les solutions canoniques du deuxième système, nous allons déformer C_i , sans franchir aucune des coupures dont il a été question au paragraphe 28, de manière à parcourir les lacets $L_{i+1}, \dots, L_1, \dots, L_{i-1}$. Le nouveau contour d'intégration comprendra en outre les segments de droite $a_i E$ et $H a_i$, ainsi qu'une circonférence infiniment grande de centre O .

En supposant $\Re(x - \gamma) < 0$, les intégrales prises le long des arcs de ce cercle sont infiniment petites, et il ne reste que celles relatives aux $n-1$ lacets et aux deux demi-droites $a_i E$ et $H a_i$. Désignons respectivement ces deux dernières intégrales par les lettres E et H .

Le long de $a_i E$, l'argument de $t - a_i$ est devenu ξ_i , donc l'inté-

grale E s'écrit, compte tenu de (34),

$$E = \sum_{h=1}^p \sum_{l=1}^p \frac{c_{s,h}'' - c_{s,h}}{2\pi i} \int_{n_1}^{E\infty} t^{x-1} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \frac{\partial^j \{t_h\}}{\partial (-\alpha_h)^j} d_{h,j,l} v'_{l,t} dt.$$

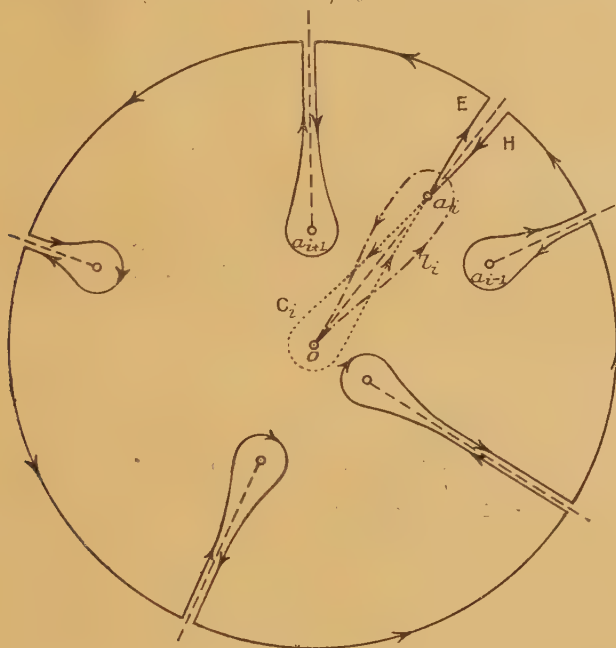


Fig. 1.

Le long de $H a_i$, l'argument de t est devenu $\zeta_i + 2\pi$, et $\frac{\partial^{r-j}(t - \alpha_h \psi(t))}{\partial (-\alpha_h)^{r-j}}$, ce que nous avons appelé $v'_{h,j,0}$. On a donc, d'après (35),

$$H = e^{2\pi i x} \sum_{h=1}^p \sum_{l=1}^p \frac{c_{s,h}'' - c_{s,h}}{2\pi i} e^{-2\pi i \alpha_h} \times \int_{n_1}^{n_2} t^{x-1} \sum_{j=0}^r \sum_{m=j}^r \binom{r}{j} \binom{r-j}{m-j} \frac{\partial^j \{t_h\}}{\partial (-\alpha_h)^j} (2\pi i)^{m-j} d_{h,m,l} v'_{l,t} dt,$$

ou, en permutant les sommations par rapport à j et m ,

$$H = \sum_{h=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=0}^r \frac{c_{s,h}'' - c_{s,h}}{2\pi i} \binom{r}{m} d_{h,m,l} \times \int_{n_1}^{n_2} t^{x-1} v'_{l,t} \sum_{j=0}^m e^{2\pi i l(x - \alpha_h)} \binom{m}{j} \frac{\partial^j \{t_h\}}{\partial (-\alpha_h)^j} (2\pi i)^{m-j} dt,$$

avec $\arg t = \xi_i$. La somme sous le signe a pour valeur $\frac{\partial^m \mu_h}{\partial (-\alpha_h)^m} + \varepsilon_{m,0}$, ce qui se voit aisément en dérivant m fois par rapport à $(-\alpha_h)$ l'identité

$$\mu_h (e^{2\pi i(x-\alpha_h)} - 1) = 1,$$

et, par suite,

$$H = H_1 + \sum_{h=1}^p \sum_{l=1}^p \frac{c''_{s,h} - c_{s,h}}{2\pi i} d_{h,l} \int_{\Pi_\infty}^{a_i} t^{x-1} v'_{l,i} dt,$$

où l'on a posé

$$H_1 = \sum_{h=1}^p \sum_{l=1}^p \frac{c''_{s,h} - c_{s,h}}{2\pi i} \int_{\Pi_\infty}^{a_i} t^{x-1} v'_{l,i} \sum_{m=0}^r \binom{r}{m} \frac{\partial^m \mu_h}{\partial (-\alpha_h)^m} d_{h,m,l} dt.$$

La différence $H - H_1$ se simplifie encore grâce aux relations (33), et il vient ainsi

$$H - H_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Pi_\infty}^{a_i} t^{x-1} (v'''_{s,i} - v'_{s,i}) dt = \bar{u}_{s,i}(x).$$

La somme des deux intégrales E et H peut alors s'écrire

$$E + H = \bar{u}_{s,i}(x) + E + H_1$$

$$\bar{u}_{s,i}(x) = \sum_{n=1}^p \sum_{l=1}^p \frac{c''_{s,h} - c_{s,h}}{2\pi i} \int_{L_i}^{a_i} t^{x-1} v_{l,i}(t) \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \frac{\partial^j \mu_h}{\partial (-\alpha_h)^j} d_{h,j,l} dt,$$

où $\arg t = \xi_i$ et où $v_{l,i}(t)$ est la branche $v'''_{l,i}$ à l'origine du lacet.

Les seules intégrales non nulles étant celles qui sont relatives aux $v_{l,i}(t)$ non holomorphes en a_i , on voit que $E + H$ s'exprime linéairement à l'aide des solutions canoniques $\bar{u}_{1,i}(x)$, $\bar{u}_{2,i}(x)$, ..., $\bar{u}_{k,i}(x)$, k désignant toujours l'ordre de multiplicité de a_i dans l'équation caractéristique. Les coefficients de ces expressions sont des formes linéaires des μ_h et de leurs dérivées par rapport à $-\alpha_h$, qui sont bien des fonctions périodiques de x .

Il reste à examiner les intégrales de la forme (37) étendues aux lacets L_{i+1} , ..., L_1 , ..., L_{i-1} . En prolongeant les $v_{h,j,0}$ le long du contour $0a_iE...$, on voit que le long de chaque lacet L_l , on peut exprimer $v_{h,j,0}$ linéairement à l'aide des $v_{1,l}$, $v_{2,l}$, ..., $v_{p,l}$; t aura bien l'argument ξ_l pour $l = i+1$, $i+2$, ..., n , mais son argument sera $\xi_l + 2\pi$ pour $l = 1, 2, \dots, i-1$. En remarquant enfin que les $v_{s,l}$ holomorphes en a_l donnent des intégrales nulles le long de L_l , l'intégrale entière s'exprimera linéairement à l'aide des seules

solutions canoniques $\bar{u}_{s,i}$; les coefficients seront de la forme de ceux trouvés pour $E + H$, avec le facteur supplémentaire $e^{2\pi i x}$ pour les solutions relatives aux points a_1, a_2, \dots, a_{i-1} .

Avant de traduire ces résultats en équations, simplifions les notations en désignant par $\rho_i, \rho_{i+1}, \dots, \rho_{i+k-1}$ les k racines correspondant aux intégrales non holomorphes au voisinage d'une racine a_i d'ordre k ($a_i = a_{i+1} = \dots = a_{i+k-1}$) de l'équation caractéristique. A ces racines correspondent k solutions canoniques de chaque système,

$$u_i(x), u_{i+1}(x), \dots, u_{i+k-1}(x) \text{ et } \bar{u}_i(x), \bar{u}_{i+1}(x), \dots, \bar{u}_{i+k-1}(x).$$

Si a_j est l'une des racines $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+k-1}$, nous sommes arrivés à une équation de la forme

$$(38) \quad u_j(x) = \bar{u}_j(x) + \sum_{h=i}^n \Pi_{j,h}(x) \bar{u}_h(x) + e^{2\pi i x} \sum_{h=1}^{i-1} \Pi_{j,h}(x) \bar{u}_h(x),$$

où $\Pi_{j,h}(x)$ est une fonction de la forme

$$\Pi_{j,h}(x) = \sum_{s=1}^p \left[\frac{A_{j,s}^{(h)}}{e^{2\pi i(x-\alpha_s)} - 1} + \frac{B_{j,s}^{(h)}}{(e^{2\pi i(x-\alpha_s)} - 1)^2} + \dots + \frac{M_{j,s}^{(h)}}{(e^{2\pi i(x-\alpha_s)} - 1)^{m_s}} \right],$$

m_s étant le nombre des racines de $p_0(x)$ du même groupe que α_s , mais de partie réelle non supérieure à $\mathcal{R}(\alpha_s)$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité.

Les hypothèses que nous avons faites sur les $\rho_{s,i}$ et $\mathcal{R}(x)$ ne sont pas nécessaires pour la conclusion, qui est une relation entre des coefficients analytiques. Celle-ci subsiste donc, quels que soient les $\rho_{s,i}$ et pour toute valeur non singulière de x .

Le calcul explicite des constantes A, B, \dots, M par cette méthode est quelquefois assez facile. Mais, le plus souvent, il est préférable d'appliquer la méthode plus directe que nous allons exposer.

IV. — DÉTERMINATION DIRECTE DES COEFFICIENTS PÉRIODIQUES DES RELATIONS LINÉAIRES.

38. Nous nous proposons maintenant d'étudier les coefficients périodiques des relations

$$(39) \quad \bar{u}_j(x) = \sum_{n=1}^n \Pi_{j,n}(x) u_n(x),$$

à partir de leurs expressions

$$(40) \quad \Pi_{j,h}(x) = \frac{D_{j,h}(x)}{D(x)},$$

où

$$D(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1(x+1) & u_2(x+1) & \dots & u_n(x+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1(x+n-1) & u_2(x+n-1) & \dots & u_n(x+n-1) \end{vmatrix},$$

et où $D_{j,h}(x)$ désigne ce que devient $D(x)$ quand on y remplace les $u_h(x+s)$ par $u_j(x+s)$ ($s=0, 1, \dots, n-1$).

Nous allons former tout d'abord une expression remarquable de $D(x)$. Nous savons déjà ⁽¹⁾ que ce déterminant vérifie l'équation aux différences

$$D(x+1) = (-1)^n \frac{p_0(x)}{p_n(x)} D(x),$$

qui s'écrit ici

$$D(x+1) = a \frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_p)}{(x-\gamma_1+n)(x-\gamma_2+n)\dots(x-\gamma_p+n)} D(x),$$

en désignant par a le produit

$$a = a_1 a_2 \dots a_n$$

des racines de l'équation caractéristique. On en conclut que

$$(41) \quad D(x) = a^x \frac{\Gamma(x-\alpha_1)\Gamma(x-\alpha_2)\dots\Gamma(x-\alpha_p)}{\Gamma(x-\gamma_1+n)\Gamma(x-\gamma_2+n)\dots\Gamma(x-\gamma_p+n)} \Pi(x),$$

$\Pi(x)$ étant une fonction périodique.

Nous allons voir que $\Pi(x)$ est une constante, mais nous nous bornerons, pour abréger la discussion, à le démontrer dans les deux circonstances extrêmes où les α_i sont tous distincts, ou tous égaux à 1.

Si tous les α_i sont distincts, on sait que

$$u_i(x) = \alpha_i^x x^{\rho_i-1} (A_0^{(i)} + \varepsilon(x)),$$

$A_0^{(i)}$ étant une constante non nulle, et $\varepsilon(x)$ tendant uniformément vers zéro quand x s'éloigne indéfiniment le long de toute direction d'argument inférieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue. En portant cette expression dans $D(x)$, on voit aisément que

$$D(x) = a^x x^{-n-\sum_{i=1}^n \rho_i} A_0^{(1)} A_0^{(2)} \dots A_0^{(n)} \varphi(x),$$

(1) Cf. § 2.

où $\varphi(x)$ est une fonction qui tend vers

$$(42) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

quand x tend vers l'infini dans un demi-plan limité à gauche, donc que

$$D(x) \sim a^x x^{-n - \sum_{i=1}^n \rho_i} \Lambda_0^{(1)} \Lambda_0^{(2)} \dots \Lambda_0^{(n)} \prod_{\substack{i, k=1 \\ i > k}}^n (a_i - a_k).$$

La comparaison de cette valeur asymptotique avec (41) donne

$$\Pi(x) \sim \Lambda_0^{(1)} \Lambda_0^{(2)} \dots \Lambda_0^{(n)} \prod_{i, k=1}^n (a_i - a_k) x^{n(p-1) - \sum_{i=1}^n \rho_i - \sum_{s=1}^p (\gamma_s - \alpha_s)}.$$

L'exposant de x se calcule aisément à partir des équations déterminantes (5), (7) et (9). Celles-ci donnent ici

$$(43) \quad \sum_{s=1}^p (\gamma_s - \alpha_s) = \frac{C_{0,p-1}}{C_{0,p}} - \frac{C_{n,p-1}}{C_{n,p}},$$

$$\rho_i - p + 1 = \frac{\Phi_{p-1}(a_i)}{a_i \Phi_p'(a_i)},$$

et, par suite,

$$\sum_{i=1}^n \rho_i - n(p-1) = \frac{\Phi_{p-1}(0)}{\Phi_p(0)} - \frac{\Phi_{p-1}(\infty)}{\Phi_p(\infty)};$$

L'exposant de x est donc nul ⁽¹⁾, et la valeur asymptotique de $\Pi(x)$ est une constante égale à

$$\Lambda_0^{(1)} \Lambda_0^{(2)} \dots \Lambda_0^{(n)} \Pi(a_i - a_k).$$

Par conséquent, $\Pi(x)$ est elle-même égale à cette constante.

39. Supposons maintenant que tous les a_i soient égaux à 1, et, en

⁽¹⁾ Ce résultat est un cas particulier d'une formule de Fuchs. Cette formule donnerait, dans le cas général de l'équation (4),

$$\sum_i \sum_s \rho_{i,i} + \sum_{s=1}^p (\gamma_s - \alpha_s) = \frac{p(p-1)}{2} \text{ (nombre des } a_i \text{ distincts).}$$

outre, qu'aucune des différences des racines $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ de l'équation déterminante ne soit un entier. Dans ce cas, les u_i peuvent être représentés par des développements de la forme

$$u_i(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_i + 1)} (\Lambda_0^{(i)} + \varepsilon(x)).$$

On en déduit

$$(-1)^s \Delta^s u_i(x) = (\rho_i + 1)(\rho_i + 2) \dots (\rho_i + s) \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho_i + s + 1)} (\Lambda_0^{(i)} + \varepsilon_1(x)),$$

et, en substituant ces expressions dans $D(x)$ mis sous la forme

$$(44) \quad D(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ \Delta u_1(x) & \Delta u_2(x) & \dots & \Delta u_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta^{n-1} u_1(x) & \Delta^{n-1} u_2(x) & \dots & \Delta^{n-1} u_n(x) \end{vmatrix},$$

on voit que

$$D(x) = \left(\frac{-1}{x} \right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\Gamma(x)^n \Lambda_0^{(1)} \Lambda_0^{(2)} \dots \Lambda_0^{(n)}}{\Gamma(x + \rho_1 + 1) \Gamma(x + \rho_2 + 1) \dots \Gamma(x + \rho_n + 1)} \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction qui tend vers

$$(45) \quad \begin{vmatrix} 1 & & & \dots & 1 \\ (\rho_1 + 1) & & & \dots & (\rho_n + 1) \\ (\rho_1 + 1)(\rho_1 + 2) & & & \dots & (\rho_n + 1)(\rho_n + 2) \\ \dots & & & \dots & \dots \\ (\rho_1 + 1)(\rho_1 + 2) \dots (\rho_1 + n - 1) & \dots & & (\rho_n + 1)(\rho_n + 2) \dots (\rho_n + n - 1) \end{vmatrix}$$

quand x tend vers l'infini dans un demi-plan limité à gauche. La valeur de ce déterminant étant

$$\prod_{i,k=1}^n (\rho_i - \rho_k) \quad (i > k),$$

on a donc

$$D(x) \sim (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Lambda_0^{(1)} \Lambda_0^{(2)} \dots \Lambda_0^{(n)} \prod_{i,k=1}^n (\rho_i - \rho_k) \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{n(n+1)}{2} + \sum_{i=1}^n \rho_i},$$

et, par suite,

$$\Pi(x) \sim (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Lambda_0^{(1)} \Lambda_0^{(2)} \dots \Lambda_0^{(n)} \Pi(\rho_i - \rho_k) \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{n(n+1)}{2} - np + \sum_{i=1}^n \rho_i + \sum_{s=1}^p (\gamma_s - \alpha_s)}.$$

La formule de Fuchs donne zéro pour la valeur de l'exposant de $\frac{1}{x}$.

D'ailleurs l'équation déterminante (9) donne ici

$$\sum_{i=1}^n z_i = np - \frac{n(n+1)}{2} + n \frac{\Phi_{p-1}^{(n-1)}(1)}{\Phi_p^{(n)}(1)},$$

tandis que (43) devient, grâce au fait que $\Phi_p(t) \equiv C_{n,p}(t-1)^n$,

$$\sum_{s=1}^p (\gamma_s - \alpha_s) = \frac{(-1)^n C_{0,p-1} - C_{n,p-1}}{C_{n,p}}.$$

Il ne faut pas oublier en outre que $t=1$ est point singulier régulier de (4), donc on peut écrire

$$\Phi_{p-1}(t) \equiv \frac{(t-1)^{n-1}}{(n-1)!} \Phi_{p-1}^{(n-1)}(1) + \frac{(t-1)^n}{n!} \Phi_{p-1}^{(n)}(1),$$

équation qui donne, pour $t=0$,

$$(-1)^n C_{0,p-1} = \frac{\Phi_{p-1}^{(n)}(1) - n \Phi_{p-1}^{(n-1)}(1)}{n!} \equiv C_{n,p-1} - n \frac{\Phi_{p-1}^{(n-1)}(1)}{n!},$$

d'où résulte la vérification du résultat annoncé. On en conclut, comme précédemment, que $\Pi(x)$ est la constante non nulle

$$\Pi(x) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} A_0^{(1)} A_0^{(2)} \dots A_0^{(n)} \Pi(z_1 - z_k).$$

On a vérifié en même temps que $D(x)$ n'est pas nul.

On verrait de même que le déterminant des solutions $\bar{u}_1(x)$, $\bar{u}_2(x)$, ..., $\bar{u}_n(x)$ est

$$\bar{D}(x) = \alpha^x \frac{\Gamma(1-x+\gamma_1-n) \Gamma(1-x+\gamma_2-n) \dots \Gamma(1-x+\gamma_p-n)}{\Gamma(1-x+\alpha_1) \Gamma(1-x+\alpha_2) \dots \Gamma(1-x+\alpha_p)} \Pi(x),$$

où $\Pi(x)$ se réduit à la même constante que pour le premier système canonique.

40. Reprenons l'expression (40) de $\Pi_{j,h}(x)$. Son numérateur admet pour pôles les points $\alpha_s - \nu$ et $\gamma_s - n + 1 + \nu$; son dénominateur admet les points $\alpha_s - \nu$ pour pôles du même ordre, et les points $\gamma_s - n - \nu$ pour zéros. Par conséquent la fonction périodique $\Pi_{j,h}(x)$ est une fonction méromorphe de x admettant les seuls pôles

$$\gamma_s \pm \nu \quad (s = 1, 2, \dots, p).$$

Pour déterminer sa forme, il suffit d'étudier comment elle se comporte quand x s'éloigne indéfiniment de l'axe réel. Considérons d'abord le cas où tous les α_i sont égaux à 1, les ρ_s formant toujours n groupes distincts. Remplaçons dans $D_{j,h}(x)$, mis sous la forme (44), $\bar{u}_j(x)$ par son développement

$$\bar{u}_j(x) = e^{\pi i(\rho_j+1)} \frac{\Gamma(-x-\rho_j)}{\Gamma(1-x)} \sum_{v=0}^{\infty} B_v^{(j)} \frac{(\rho_j+1)(\rho_j+2)\dots(\rho_j+v)}{(x-1)(x-2)\dots(x-v)},$$

et, par suite, $\Delta \bar{u}_j(x)$ par

$$\Delta \bar{u}_j(x) = e^{\pi i(\rho_j+1)} \frac{\Gamma(-x-\rho_j-s)}{\Gamma(1-x)} \sum_{v=0}^{\infty} B_v^{(j)} \frac{(\rho_j+1)(\rho_j+2)\dots(\rho_j+v+s)}{(x-1)(x-2)\dots(x-v)};$$

on voit tout de suite que $\Pi_{j,h}(x)$ peut être considéré comme le produit de

$$e^{\pi i(\rho_j+1)} \frac{\Gamma(-x-\rho_j) \Gamma(x+\rho_h+1)}{\Gamma(1-x) \Gamma(x)}$$

par le quotient de deux déterminants, qui restent finis quand τ tend vers l'infini. Le dénominateur tend alors vers le déterminant (45). Si $j = h$, le numérateur tend vers le même déterminant, donc

$$(46) \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Pi_{h,h}(x) = e^{2\pi i \rho_h},$$

$$(47) \quad \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Pi_{h,h}(x) = 1.$$

Si $j \neq h$, le numérateur tend vers zéro plus vite que toute puissance de x , ce qui se voit en raisonnant comme on a fait au paragraphe 25, car les B_v sont ici également les différences successives des A_v . On a donc

$$(48) \quad \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} x^v \Pi_{j,h}(x) = 0 \quad (j \neq h),$$

quel que soit le nombre positif v .

Nous avons ainsi démontré que la fonction $\Pi_{j,h}(x)$, qui est une fonction analytique et uniforme de $z = e^{2\pi i x}$, est une fonction méromorphe de z , avec les seuls pôles $e^{2\pi i \gamma_s}$, et régulière à l'infini. C'est donc une fonction rationnelle, de la forme

$$(49) \quad \Pi_{j,h}(x) = \varepsilon_{j,h} + \sum_{s=1}^p \left\{ \frac{A_{j,s}^{(h)}}{e^{2\pi i(x-\gamma_s)} - 1} + \frac{B_{j,s}^{(h)}}{(e^{2\pi i(x-\gamma_s)} - 1)^2} + \dots + \frac{M_{j,s}^{(h)}}{(e^{2\pi i(x-\gamma_s)} - 1)^{m_s}} \right\},$$

m_s étant l'ordre de multiplicité de γ_s , et les constantes A, B, ..., M devant satisfaire, d'après (46) et (48), aux identités

$$(50) \sum_{s=1}^p \{ -A_{j,s}^{(h)} + B_{j,s}^{(h)} + \dots + (-1)^{m_s} M_{j,s}^{(h)} \} = \begin{cases} e^{2\pi i \rho_h} - 1 & (j = h), \\ 0 & (j \neq h). \end{cases}$$

41. Si tous les α_i sont distincts, remplaçons, dans $D_{j,h}(x)$, $\bar{u}_j(x)$ par son développement

$$\bar{u}_j(x) = e^{\pi i(\rho_j+1)} \alpha_j^x \frac{\Gamma\left(-\frac{x}{\omega} - \rho_j\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)} (\Lambda_0^{(j)} + \varepsilon_1(x)),$$

$\varepsilon_1(x)$ tendant uniformément vers zéro avec $\frac{1}{x}$ dans tout intervalle fini de σ . $\Pi_{j,h}(x)$ peut ainsi se mettre sous la forme du produit de

$$e^{\pi i \rho_j + 1} \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_h}\right)^x \frac{\Gamma\left(-\frac{x}{\omega} - \rho_j\right) \Gamma\left(\frac{x}{\omega} + \rho_h + 1\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{x}{\omega}\right) \Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}$$

par le quotient de deux déterminants. Quand x s'éloigne à l'infini, le dénominateur tend vers le déterminant (42), et le numérateur tend vers le même déterminant si $j = h$, et vers zéro plus vite que toute puissance de x si $j \neq h$. La seule différence avec le cas précédent est l'introduction du facteur $\left(\frac{\alpha_j}{\alpha_h}\right)^x$, dont la valeur absolue est

$$\left(\frac{r_j}{r_h}\right)^x e^{-\tau(\xi_j - \xi_h)}.$$

La conclusion est donc la même que dans le cas précédent si $j = h$. Par contre, si $j \neq h$, le facteur $e^{-\tau(\xi_j - \xi_h)}$ augmente indéfiniment quand τ tend vers $+\infty$, si $j < h$, ou quand τ tend vers $-\infty$, si $j > h$. Mais la remarque que $|\xi_j - \xi_h| < 2\pi$ permet de conclure que

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} e^{2\pi i x} \Pi_{j,h}(x) = 0,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Pi_{j,h}(x) = 0,$$

si $j < h$, et

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Pi_{j,h}(x) = 0,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} e^{-2\pi i x} \Pi_{j,h}(x) = 0,$$

si $j > h$.

Ces conclusions se présentent sous une forme plus simple si l'on remplace $\Pi_{j,h}(x)$ par $e^{2\pi i x} \Pi_{j,h}(x)$ pour $j > h$. (39) s'écrit alors

$$(51) \quad \bar{u}_j(x) = e^{2\pi i x} \sum_{h=1}^{j-1} \Pi_{j,h}(x) u_h(x) + \sum_{h=j}^n \Pi_{j,h}(x) u_h(x),$$

et l'on a

$$(52) \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Pi_{h,h}(x) = e^{2\pi i \rho_h}, \quad \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Pi_{h,h}(x) = 1,$$

$$(53) \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} e^{2\pi i x} \Pi_{j,h}(x) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Pi_{j,h}(x) = 0 \quad (j \neq h).$$

De même que plus haut, on conclut de ces égalités que $\Pi_{j,h}(x)$ a encore la forme (49), et que la relation (50) subsiste pour $j = h$, mais non pour $j \neq h$, car on n'a pas, dans ce cas,

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Pi_{j,h}(x) = 0.$$

Le cas général se traiterait par une méthode intermédiaire entre les deux méthodes extrêmes auxquelles nous nous sommes bornés. On retrouve d'ailleurs la relation générale obtenue dans le Chapitre précédent

$$(54) \quad \bar{u}_j(x) = e^{2\pi i x} \sum_{h=1}^{i-1} \Pi_{j,h}(x) u_h(x) + \sum_{h=i}^n \Pi_{j,h}(x) u_h(x),$$

où a_j est une racine d'ordre k ($a_i = a_{i+1} = \dots = a_{i+k-1}$) de l'équation caractéristique, et où les $\Pi_{j,h}(x)$ ont encore la forme (49). En outre, si la solution appartenant à ρ_j ne contient pas de logarithme, la relation (50) est vraie pour $h = i, i+1, \dots, i+k-1$, donc pour $h = j$; par contre, elle ne subsiste pas pour les autres valeurs de h .

42. Pour compléter cette étude, il nous reste à déterminer les constantes A, B, \dots, M . Plaçons-nous dans le cas général, mais avec la restriction que les pôles γ_s sont simples, de sorte que les constantes $B_{j,s}^{(h)}, \dots, M_{j,s}^{(h)}$ sont nulles. En remarquant que la fonction $u_j(x)$ est régulière aux points $\gamma_s - 1 - \nu$, et en désignant par $\frac{R_{j,s}}{2\pi i}$ son résidu au pôle γ_s , on déduit immédiatement de (54) les n équations suivantes :

$$e^{2\pi i \gamma_s} \sum_{n=1}^{i-1} A_{j,s}^{(h)} u_h(\gamma_s - m) + \sum_{h=i}^m A_{j,s}^{(h)} u_h(\gamma_s - m) = \begin{cases} R_{j,s}, & (m=0) \\ 0 & (m=1, 2, \dots, n-1). \end{cases}$$

Ces équations, où l'on considère comme inconnues les $A_{j,s}^h$ ($h \geq i$) et les $e^{2\pi i \gamma_s} A_{j,s}^h$ ($h < i$), sont tout à fait analogues aux équations (31) (§ 9) qui caractérisent les *multiplieurs* $w_1(x)$, $w_2(x)$, ..., $w_n(x)$ des $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, où x aurait la valeur $\gamma_s - n$, qui est d'ailleurs un point ordinaire pour ces fonctions. Il vient donc

$$A_{j,s}^h = \begin{cases} R_{j,s} w_h(\gamma_s - n) & (h \geq i), \\ R_{j,s} w_h(\gamma_s - n) e^{-2\pi i \gamma_s} & (h < i). \end{cases}$$

Nous pouvons ainsi énoncer le

THÉOREME. — *Les coefficients périodiques des relations linéaires qui lient les deux systèmes de solutions canoniques sont des fonctions rationnelles de $e^{2\pi i c}$, dont les coefficients ne dépendent que :*

- 1° des racines $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ de $p_n(x)$;
- 2° des résidus des solutions canoniques $\bar{u}_j(x)$ aux points γ_s ;
- 3° des valeurs des multiplieurs associés aux $u_h(x)$, aux points $\gamma_s - n$.

V. — PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DES SOLUTIONS.

43. Nous sommes maintenant en mesure d'étudier comment se comportent nos solutions canoniques au voisinage de l'infini, qui est leur seul point singulier essentiel. Considérons par exemple $\bar{u}_j(x)$, dont nous connaissons déjà l'expression asymptotique quand x tend vers l'infini dans un demi-plan limité arbitrairement à droite. Lorsque x s'éloigne indéfiniment dans une direction faisant un angle aigu non nul avec l'axe des nombres positifs, on est renseigné par la relation (54), dont tous les éléments au second membre se comportent alors de manière suffisamment connue.

Auparavant faisons une remarque importante relativement aux coefficients périodiques. Il résulte de (49) que, lorsque x tend vers l'infini sur un rayon vecteur d'argument compris entre 0 et $-\pi$, $e^{2\pi i x} \Pi_{j,h}(x)$ ($j \neq h$) tend vers une limite finie, généralement différente de zéro, et $\Pi_{j,j}(x)$ tend vers 1. Si l'argument de x est compris entre 0 et π , et si h est différent des indices $i, i+1, \dots, j, \dots, i+k-1$, $\Pi_{j,h}(x)$ tend vers une limite finie, généralement

différente de zéro; par contre, pour $h = i, i + 1, \dots, j - 1, j + 1, \dots, i + k - 1$, les relations (50) étant valables, on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2\pi i x} \Pi_{j,h}(x) = \text{const.}$$

Enfin, ces mêmes relations montrent que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Pi_{j,j}(x) = e^{2\pi i \rho_j}.$$

On voit donc que, le facteur exponentiel étant le même dans tous les termes d'un pareil groupe, *les termes contenant $u_i(x), u_{i+1}(x), \dots, u_{j-1}(x), u_{j+1}(x), \dots, u_{i+k-1}(x)$ sont toujours sans influence sur la valeur asymptotique de $\bar{u}_j(x)$, par rapport au terme contenant $u_j(x)$.*

Si l'on applique cette remarque au cas où tous les a_i sont égaux à 1, il vient

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{u}_j(x)}{u_j(x)} = \begin{cases} 1 & (-\pi + \varepsilon \leq \arg x \leq -\varepsilon), \\ e^{2\pi i \rho_j} & (\varepsilon \leq \arg x \leq \pi - \varepsilon), \end{cases}$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit. Il résulte alors de (27) et de l'égalité semblable relative à $\bar{u}_{s,i}(x)$ que l'on a uniformément

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\rho_j+1} \bar{u}_j(x)}{\log^q \frac{1}{x}} = \begin{cases} k & \left(-\frac{3\pi}{2} \leq \arg x \leq -\varepsilon\right), \\ k e^{2\pi i \rho_j} & \left(\varepsilon \leq \arg x \leq \frac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

ce qui s'écrit encore

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\rho_j+1} \bar{u}_j(x)}{\log^q \frac{1}{x}} = k \quad (-2\pi + \varepsilon \leq \arg x \leq -\varepsilon).$$

On voit de même que l'on a uniformément

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\rho_j+1} u_j(x)}{\log^q \frac{1}{x}} = k \quad (-\pi + \varepsilon \leq \arg x \leq \pi - \varepsilon).$$

Ce résultat est remarquable, car les solutions canoniques que nous avons obtenues apparaissent, dans ce cas, comme des fonctions méromorphes des plus simples. Il met également en évidence la singularité de la direction de l'axe positif pour les $\bar{u}_j(x)$, et de l'axe négatif pour les $u_j(x)$.

44. Lorsque les a_i sont des nombres quelconques, le facteur prépondérant dans un terme du second membre de (54) est généralement exponentiel. La valeur absolue d'un tel terme a_h^x étant

$$e^{\sigma \log r_h - \tau \xi_h},$$

l'étude des ordres de grandeur relatifs de ces différents termes, quand x s'éloigne à l'infini, est rendue aisée par la remarque que l'exposant est le produit scalaire des deux vecteurs $\sigma + i\tau$, $\log r_h - i\xi_h$. Si l'on représente chaque racine a_h par le point A_h du plan de x d'affixe $\log r_h - i\xi_h$, les valeurs absolues des éléments a_h^x sont donc représentées, au facteur infiniment grand $|x|$ près, par les vecteurs $\overrightarrow{OB_h}$, projections des vecteurs $\overrightarrow{OA_h}$ sur le rayon vecteur le long duquel s'éloigne x .

Tous les points A_h sont compris dans la bande $0 \geq \tau \geq -2\pi$, mais il faut tenir compte également des facteurs $e^{2\pi i x}$. Si l'argument de x est compris entre 0 et π , les coefficients $\Pi_{j,h}(x)$ restent généralement finis et non nuls, sauf ceux relatifs à des termes sans influence; pour les termes d'indice $h < j$, a_h^x doit être remplacé par $(e^{2\pi i} a_h)^x$, c'est-à-dire que A_h doit être remplacé par le point A'_h de même abscisse $\log r_h$ mais d'ordonnée $-\xi_h - 2\pi$. Au contraire, si l'argument de x est compris entre 0 et $-\pi$, ce sont les quantités $e^{2\pi i x} \Pi_{j,h}(x)$ ($j \neq h$) qui restent finies; on doit donc remplacer a^x par $(e^{-2\pi i} a_h)^x$ pour les indices $h \geq i + k$, c'est-à-dire ces points A_h par les points A'_h de même abscisse mais d'ordonnée $-\xi_h + 2\pi$. Cela revient à compter tous les arguments des a_h entre ξ_j et $\xi_j + 2\pi$ pour les directions de x situées au-dessus de l'axe positif, et entre ξ_j et $\xi_j - 2\pi$ pour celles qui sont situées au-dessous, la direction elle-même de cet axe étant singulière.

En tout cas, on voit que si x s'éloigne sur un rayon vecteur d'argument non nul compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, c'est celui des points B_h , projections des points A_h (ou A'_h), qui est situé le plus près du point représentatif de x qui détermine l'ordre de grandeur de $\bar{u}_j(x)$; et l'expression asymptotique change en même temps que le point B_h prépondérant. Si nous traçons, pour chacun des deux ensembles de points A_h (ou A'_h) obtenus plus haut, le plus petit polygone convexe qui les entoure, ceci se produira pour les rayons vecteurs du quadrant relatif à l'un de ces polygones et perpendiculaires à l'un des côtés de ce polygone.

On partage ainsi les directions du plan en un certain nombre d'angles dont les côtes sont perpendiculaires à certains côtes de nos deux polygones. Quand x tend vers l'infini dans un angle intérieur à l'un de ces angles, on sait former une expression

$$\tau_{is}(x) = a_s^x \left(\frac{1}{x}\right)^{p_s-1} \log^q \frac{1}{x},$$

dans laquelle l'argument de a_s a subi au besoin la modification indiquée plus haut, telle que $u_{is}(x) : \tau_{is}(x)$ tende vers une limite finie. Ces expressions se permutent entre elles quand l'argument de x varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, une telle permutation pouvant se faire par une expression asymptotique de la forme

$$\sum_s c_s \tau_{is},$$

où les c_s sont des constantes, valable le long du rayon vecteur qui sépare les deux angles. Mais ces considérations ne s'appliquent pas à la direction de l'axe positif, qui est une direction singulière. Il n'existe aucune fonction $u_i(x)$, ou même aucune expression $\sum c_s \tau_{is}$, qui représente asymptotiquement $u_i(x)$, quand x tend vers l'infini le long d'une demi-droite parallèle à l'axe des nombres positifs. On peut cependant se rendre compte, sur le second membre de (54), comment varient les valeurs de $\bar{u}_i(x)$ le long d'une telle direction.

Pour les solutions $u_j(x)$, on trouve des résultats du même ordre, la direction singulière étant l'axe des nombres négatifs. On en conclut, en particulier, que le rapport $\frac{u_j(x)}{\tau_j(x)} \rightarrow 1$ tend vers l'une des racines de l'équation caractéristique quand x tend vers l'infini sur un rayon vecteur intérieur à l'un des angles indiqués. Quand on passe d'un de ces angles à un autre, les différentes racines se permutent, et la limite cesse d'exister sur les rayons vecteurs qui limitent ces angles ⁽¹⁾.

(1) En considérant x comme un entier positif, H. Poincaré a démontré (*loc. cit.*) le théorème plus général suivant : « Si les coefficients de l'équation (1) sont des fonctions qui tendent vers des limites finies quand x augmente indéfiniment, et si l'équation caractéristique admet r racines distinctes et de valeurs absolues différentes, le rapport $\frac{u_j(x)}{\tau_j(x)} \rightarrow 1$ tend vers l'une des racines de l'équation caractéristique quand x augmente indéfiniment. »

45. Les résultats auxquels nous avons abouti en développant les solutions en série de facultés, suivant la méthode exposée par N. E. Norlund dans sa Thèse (1), peuvent également s'obtenir à l'aide de certaines séries de puissances divergentes, comme l'a fait tout H. Galbrun (2). Reprenons l'équation (1) et admettons que les points $t = 0$ et $t = x$ soient des points singuliers, réguliers ou non, de la transformée de Laplace (4). H. Galbrun forme des solutions de (1) de la façon suivante.

Les racines z_1, z_2, \dots, z_p de l'équation caractéristique relative à $t = 0$ étant rangées en groupes de racines distinctes, on sait que l'on peut former p solutions indépendantes $v_{1,0}, v_{2,0}, \dots, v_{p,0}$ de (4) telles que les h solutions $v_{1,0}, v_{2,0}, \dots, v_{h,0}$ correspondant à une racine multiple z_i d'ordre h se transforment, par une rotation directe autour de l'origine, conformément aux équations

$$\begin{aligned} v'_{1,0} &= \delta_{1,1} v_{1,0}, \\ v'_{2,0} &= \delta_{2,1} v_{1,0} + \delta_{2,2} v_{2,0}, \\ &\dots \dots \dots \\ v'_{h,0} &= \delta_{h,1} v_{1,0} + \delta_{h,2} v_{2,0} + \dots + \delta_{h,h-1} v_{h-1,0} + \delta_{h,h} v_{h,0}, \end{aligned}$$

ou $\delta_{i,j} = e^{2\pi i \alpha_{ij}}$, et où les $\alpha_{i,j}$ sont certaines constantes. On peut en déduire des solutions $V_{i,0}$ de (4) qui soient transformées, par une rotation directe autour de l'origine, en $V'_{i,0}$, avec

$$e^{2\pi i x} V'_{i,0} - V_{i,0} = v_{i,0}.$$

Si v_i désigne alors une solution non holomorphe au point a_i , que l'on suppose encore point singulier régulier, et si v'_i désigne ce qu'elle devient après une rotation directe autour de a_i , on a

$$v'_i = v_i + \sum_{j=1}^p c_{i,j} v_{j,0},$$

où les $c_{i,j}$ sont certaines constantes. Les solutions de (1) en question

Copenhague, 1910. Voir aussi *Acta mathematica*, t. 31, 1907, p. 1-107 et 149-1915, p. 191-249; *C. R. Acad. Sc.*, t. 147, 5 octobre 1908; t. 149, 15 novembre 1909.

(2) *Acta mathematica*, t. 36, 1912, p. 1-68. — Voir également *C. R. Acad. Sc.*, t. 148, 5 avril 1909; t. 149, 6 décembre 1909; t. 150, 24 janvier 1910; t. 151, 12 décembre 1910.

sont représentées par les intégrales de Laplace

$$u_i(x) = \int_{L_i} t^{x-1} v_i(t) dt - \int_{L_0} t^{x-1} (c_{1,i} V_{1,0} + c_{2,i} V_{2,0} + \dots + c_{p,i} V_{p,0}) dt,$$

où L_0 et L_i sont deux lacets ayant leurs origines au même point a , et tournant dans le sens direct respectivement autour de $t=0$ et de $t=a_i$.

En remplaçant le lacet L_0 par un contour L_∞ qui entoure $t=0$ et tous les points a_i , et en substituant aux $v_{i,0}$ et $V_{s,0}$ les solutions $v_{s,\infty}$ et $V_{s,\infty}$ qui jouent le même rôle à l'infini, on peut former un deuxième système fondamental de solutions

$$\bar{u}_i(x) = \int_{L_i} t^{x-1} v_i(t) dt - \int_{L_\infty} t^{x-1} (\bar{c}_{1,i} V_{1,\infty} + \bar{c}_{2,i} V_{2,\infty} + \dots + \bar{c}_{p,i} V_{p,\infty}) dt,$$

avec

$$v_i' - v_i = \sum_{s=1}^p \bar{c}_{s,i} v_{s,\infty}.$$

L'auteur montre que les solutions $u_i(x)$ sont représentables asymptotiquement, à droite de l'axe des imaginaires, par des séries divergentes de la forme

$$(55) \quad \alpha_i^x x^{\beta_i} \left(g_0^{(i)} + \frac{g_1^{(i)}}{x} + \dots + \frac{g_\nu^{(i)}}{x^\nu} + \dots \right),$$

et, à gauche de cet axe, par des séries analogues, mais qui dépendent de l'angle dans lequel x s'éloigne à l'infini.

Dans un travail récent ⁽¹⁾, H. Galbrun a étudié le cas exceptionnel où l'équation caractéristique admet une racine double qui soit un point singulier irrégulier de l'équation (4). Ce sont alors des séries de la forme

$$\alpha^x x^\nu e^{h\sqrt{x}} \left(g_0 + \frac{g_1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{g_2}{x} + \dots + \frac{g_\nu}{x^{\frac{\nu}{2}}} + \dots \right),$$

qui représentent asymptotiquement les solutions obtenues dans ce cas.

(1) *Bull. Soc. math. France*, t. XLIX, 1921, p. 206-241.

CHAPITRE IV.

RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES.

I. — FORMATION DES SOLUTIONS QUI CROISSENT LE MOINS RAPIDEMENT.

46. Une application intéressante de la méthode des approximations successives à la résolution de certaines équations linéaires aux différences finies a été faite par R. D. Carmichael ⁽¹⁾. Cet auteur considère une équation d'ordre n

$$(1) \quad \sum_{i=0}^n p_i(x) u(x+i) = 0,$$

dont les coefficients $p_i(x)$ sont holomorphes à l'infini, avec $p_0(\infty) \neq 0$, $p_n(\infty) \neq 0$, de sorte qu'on peut supposer $p_n(x) = 1$. Si toutes les singularités des $p_i(x)$ sont intérieures à un cercle, on peut poser, pour $|x|$ suffisamment grand,

$$(2) \quad p_i(x) = a_{i,0} + \frac{a_{i,1}}{x} + \frac{a_{i,2}}{x^2} + \dots \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

avec $a_{0,0} \neq 0$. Cherchons une solution formelle de (1), de la forme indiquée dans le paragraphe précédent,

$$(3) \quad u(x) = ax^2 \left(g_0 + \frac{g_1}{x} + \frac{g_2}{x^2} + \dots \right) \quad (g_0 \neq 0).$$

⁽¹⁾ *American Journal of Math.*, vol. XXXVIII, 1916, p. 185-220. Voir également *Transactions of the American Math. Society*, vol. 12, 1911, p. 99-134.

La substitution dans (1) conduit aux équations suivantes, pour déterminer les paramètres α , φ , g_0 , g_1 , ... ,

$$(4) \quad \alpha_{0,0} + f_{0,0}(\alpha) = 0,$$

$$(5) \quad \alpha_{0,1} + \sum_{t=0}^1 f_{1,t}(\alpha) \left(\frac{\varphi}{t} \right) = 0,$$

$$(6) \quad \alpha_{0,2} + \sum_{t=0}^2 f_{2,t}(\alpha) \left(\frac{\varphi}{t} \right) = 0,$$

$$(7) \quad \alpha_{0,3} + \sum_{t=0}^3 f_{3,t}(\alpha) \left(\frac{\varphi}{t} \right) = 0, \dots, \alpha_{0,n-1} + \sum_{t=0}^{n-1} f_{n-1,t}(\alpha) \left(\frac{\varphi}{t} \right) = 0,$$

où l'on a posé

$$f_{v,s}(\alpha) = \sum_{i=1}^v a_{i,v-s} \alpha^i i^s \quad (a_{n,v-s} = \varepsilon_{v,s}).$$

On voit tout d'abord que α doit être racine de l'équation caractéristique

$$(7) \quad f(\alpha) = f_{0,0}(\alpha) + \alpha_{0,0} = \alpha^n + \alpha_{n-1,0} \alpha^{n-1} + \dots + \alpha_{1,0} \alpha + \alpha_{0,0} = 0.$$

Cette équation a n racines non nulles, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, sur lesquelles nous faisons l'hypothèse supplémentaire qu'elles sont distinctes, α étant choisi parmi ces racines, l'équation (5) définit φ sans ambiguïté, le coefficient de cette quantité étant $f_{1,1}(\alpha) = \alpha \frac{df(\alpha)}{d\alpha}$, qui diffère de zéro d'après nos hypothèses. Les équations (6) définissent alors successivement g_1, g_2, g_3, \dots en fonction de g_0 , que l'on peut prendre égal à 1, car les premiers coefficients dans ces équations ne sont sûrement pas nuls. On sait ainsi former n solutions formelles

$$(8) \quad \alpha_i^x x^{\varphi_i} \left(1 + \frac{g_1^i}{x} + \frac{g_2^i}{x^2} + \dots \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

mais ces développements sont généralement divergents.

47. Posons

$$g_i(x) = \alpha_i^x x^{\varphi_i} \left(1 + \frac{g_1^i}{x} + \frac{g_2^i}{x^2} + \dots + \frac{g_m^i}{x^m} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

m désignant un certain entier. Ces n fonctions peuvent constituer un système fondamental de solutions d'une équation aux différences linéaires d'ordre n , comme il résulte du raisonnement fait au paragraphe 31 sur les fonctions d'expression asymptotique plus générale; nous savons aussi former cette équation à l'aide d'un déterminant. On voit tout de suite que les coefficients de cette équation ont les propriétés des $p_i(x)$, et nous l'écrirons

$$(9) \quad Q(u(x)) = \sum_{i=0}^n q_i(x) u(x+i) = 0 \quad [q_n(x) = 1].$$

Il résulte du choix des $g_i(x)$, que les équations (4), (5), ainsi que les m premières équations (6) relatives à $Q(u(x))$, doivent être identiques aux équations relatives à (1), donc que les $q_i(x)$ développés en série entière de $\frac{1}{x}$ ont les mêmes $m+2$ premiers coefficients que les $p_i(x)$. On a donc

$$(10) \quad b_i(x) \equiv q_i(x) - p_i(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b_{m+2+\nu}^{(i)}}{x^{m+2+\nu}} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

et l'équation (1) s'écrit

$$(11) \quad Q(u(x)) = B(u(x)),$$

où l'on a posé

$$B(u(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) u(x+i).$$

Considérons alors la suite d'équations, toutes d'ordre n ,

$$(12) \quad \begin{cases} Q(u^{(1)}(x)) = 0, \\ Q(u^{(2)}(x)) = B(u^{(1)}(x)), \\ \dots\dots\dots \\ Q(u^{(n)}(x)) = B(u^{(n-1)}(x)), \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

La première équation, homogène, admet la solution générale

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \pi_i(x) g_i(x).$$

Chacune des équations suivantes est une équation non homogène

dont l'équation sans second membre admet un système fondamental de solutions connu, et dont le second membre a une valeur déterminée par la résolution des équations précédentes. Or nous savons former deux solutions formelles de

$$Q(u(x)) = q(x),$$

à l'aide des fonctions $R_\nu(x)$ associées à $Q(u(x))$, savoir

$$(13) \quad R_x.q = - \sum_{\nu=0}^{\infty} R_\nu(x) q(x+\nu),$$

$$(14) \quad \bar{R}_x.q = \sum_{\nu=-1}^{\infty} \bar{R}_{-\nu}(x) q(x-\nu).$$

On est ainsi conduit à former les solutions formelles suivantes des équations (12):

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x) &= g(x) = \sum_{i=1}^n \pi_i(x) g_i(x), \\ u^{(2)}(x) &= g(x) + R_x.B(g(x)), \\ u^{(3)}(x) &= g(x) + R_x.B(g(x)) + R_x.B\{R_x.B(g(x))\}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et, par suite, le développement infini

$$(15) \quad u(x) = g(x) + R_x.B(g(x)) + R_x.B\{R_x.B(g(x))\} + \dots$$

On vérifie immédiatement que c'est une solution formelle de (11). donc de (1). On construit de même une deuxième solution formelle

$$(16) \quad \bar{u}(x) = g(x) + \bar{R}_x.B(g(x)) + \bar{R}_x.B\{\bar{R}_x.B(g(x))\} + \dots$$

48. Les développements (15) et (16) divergent si l'on choisit arbitrairement les fonctions périodiques $\pi_i(x)$. Mais si l'on pose

$$(17) \quad |a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_n|,$$

(15) converge pour $g(x) = g_1(x)$. Pour le démontrer, nous aurons besoin d'une limite supérieure des $|R_\nu(x)|$ plus précise que les inégalités du paragraphe 3. Si $h_1(x)$, $h_2(x)$, ..., $h_n(x)$ désignent les multiplicateurs correspondant à $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_n(x)$, nous

savons que

$$R_v(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x) h_i(x+v).$$

Il résulte des formules (30) (§ 9) que $h_i(x)$ est une fonction analytique de x si $|x+s|$ est supérieur ou égal à un certain nombre R ($s=1, 2, \dots, n$), et, par suite, que les $h_i(x+v)$ sont analytiques dans le domaine Γ défini par les inégalités

$$(\Gamma) \quad |x+v| \geq R,$$

ou encore par le système

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} |x| \geq R & \text{si } \sigma \geq 0, \\ |z| \geq R & \text{si } \sigma \leq 0. \end{cases}$$

Cette même formule (30) (§ 9) fournit d'ailleurs une limite supérieure de $|h_i(x)|$ dans Γ , en y remplaçant $g_i(x)$ par

$$g_i(x) = a_i^x x^{\rho_i} (1 + \varepsilon_i),$$

ε_i tendant vers zéro avec $\frac{1}{R}$; on voit que, si R est assez grand,

$$h_i(x) = \frac{O(1)}{a_i^x x^{\rho_i}}$$

et, par suite, que

$$h_i(x+v) g_i(x) = \frac{O(1)}{a_i^x} \left(\frac{x}{x+v} \right)^{\rho_i}.$$

On peut donc trouver une constante C_1 telle que l'on ait, dans un domaine Γ défini par un rayon R assez grand,

$$(18) \quad |R_v(x)| < \frac{C_1}{|a_1|^v} \sum_{i=1}^n \left| \frac{x}{x+v} \right|^{\rho'_i},$$

où ρ'_i désigne $\mathcal{R}(\rho_i)$.

D'autre part, il est clair qu'on peut trouver trois constantes C_2, C_3, C_4 , telles que l'on ait, dans Γ ,

$$(19) \quad |b_i(x)| < C_2 |x|^{-m-2},$$

$$(20) \quad |g_1(x+i)| < C_3 |g_1(x)| \quad (i=0, 1, \dots, n),$$

$$(21) \quad |g_1(x+v)| < C_4 |g_1(x)| |a_1|^v \left| \frac{x+v}{x} \right|^{\rho'_1};$$

d'ailleurs (20) et (21) entraînent

$$(22) \quad |g_1(x+i+v)| < C_3 C_4 |g_1(x)| |a_1|^v \left| \frac{x+v}{x} \right|^{\rho'_1}.$$

A l'aide de ces inégalités, nous allons démontrer la convergence des séries de notre développement (15), et celle de ce développement lui-même. Considérons d'abord le deuxième terme. C'est une série de la forme (13) où $q(x) = B(g_1(x))$, de sorte que l'on a, en vertu de (19) et (22),

$$|q(x+v)| < n C_2 C_3 C_4 |g_1(x)| |a_1|^v |x+v|^{-m-2} \left| \frac{x+v}{x} \right|^{\rho'_1};$$

il en résulte, ainsi que, de (18),

$$(23) \quad \sum_{v=0}^{\infty} |R_v(x) q(x+v)| \\ < n C_1 C_2 C_3 C_4 |g_1(x)| \sum_{i=1}^n |x|^{\rho'_i - \rho'_1} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{|x+v|^{m+2+\rho'_i - \rho'_1}},$$

et cette dernière série est convergente pourvu que m soit pris suffisamment grand. On voit même que la série de notre second terme est uniformément convergente dans tout domaine borné de Γ , donc que $R_x.B(g_1(x))$ est une fonction analytique de x dans Γ . (23) fournit en outre une limite supérieure de cette fonction, grâce à la double inégalité suivante, due à Birkhoff⁽¹⁾,

$$(24) \quad \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{|x+v|^{m+2}} < \begin{cases} \frac{\pi}{|x|^{m+1}} & (|x| \geq 1, \sigma \geq 0), \\ \frac{2\pi}{|\tau|^{m+1}} & (|\tau| \geq 1); \end{cases}$$

(1) On a, en effet, $|x+v| = (\sigma+v)^2 + \tau^2$. Donc, si $\sigma \geq 0$,

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{|x+v|^{m+2}} < \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(|x|^2 + v^2)^{\frac{m}{2}+1}} < \frac{1}{|x|^m} \int_0^{\infty} \frac{dv}{|x|^2 + v^2} < \frac{\pi}{2|x|^{m+1}}.$$

Si σ est quelconque, et $|\tau| > 0$, on a

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{|x+v|^{m+2}} < \frac{1}{|\tau|^m} \int_0^{\infty} \frac{dv}{(\sigma+v)^2 + \tau^2} < \frac{2}{|\tau|^{m+1}} \int_0^{\infty} \frac{dz}{1+z^2} < \frac{\pi}{|\tau|^{m+1}}.$$

où m est un nombre positif quelconque. En posant $M = \pi n^2 C_1 C_2 C_3 C_4$, on déduit ainsi de (23) que l'on a, dans Γ ,

$$(25) \quad |R_x, B(g_1(x))| \leq \begin{cases} \frac{M |g_1(x)|}{|x|^{m+1}} & (\sigma \geq 0), \\ \frac{2M}{n} \frac{|g_1(x)|}{|\tau|^{m+1}} \sum_{i=1}^n \left| \frac{x}{\tau} \right|^{\rho'_i - \rho'_1} & (\tau \leq 1). \end{cases}$$

Le troisième terme de (15) s'exprime en fonction de $R_x, B(g_1(x))$ comme ce dernier en fonction de $g_1(x)$, mais ici il faut établir une distinction entre les deux parties de Γ où $\sigma \geq 0$ et où $|\tau| \geq 1$. Pour $\sigma \geq 0$, (25) entraîne l'inégalité

$$\sum_{i=0}^{n-1} |b_i(x+y) R_{x+i+y}, B(g_1(x))| < M n C_2 C_3 C_4 \frac{|g_1(x)| |a_1|^y}{|x+y|^{2m+3}} \left| \frac{x+y}{x} \right|^{\rho'_i},$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} & |R, B\{R_x, B(g_1(x))\}| \\ & < M n C_1 C_2 C_3 C_4 |g_1(x)| \sum_{i=1}^n |x|^{\rho'_i - \rho'_1} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{1}{|x+y|^{2m+3+\rho'_i - \rho'_1}}, \end{aligned}$$

d'où enfin, grâce à la première inégalité de Birkhoff,

$$(26) \quad |R_x, B\{R_x, B(g_1(x))\}| < \frac{M^2 |g_1(x)|}{|x|^{2m+2}} \quad (\sigma \geq 0).$$

Dans la partie de Γ où $|\tau| \geq 1$, on a

$$|R_{x+i+y}, B(g_1(x))| < \frac{2M C_3 C_4 |g_1(x)|}{n |\tau|^{m+1}} |a_1|^y \left| \frac{x+y}{x} \right|^{\rho'_1} \sum_{j=1}^n \left| \frac{x+y}{\tau} \right|^{\rho'_j - \rho'_1},$$

car $\left| \frac{x+y}{x+i+y} \right|$ ($i = 0, 1, \dots, n$) est aussi voisin que l'on veut de 1, pourvu que R soit suffisamment grand. On en déduit la limite supérieure suivante du premier membre de (26),

$$2M C_1 C_2 C_3 C_4 \frac{|g_1(x)|}{|\tau|^{m+1}} \sum_{i,j=1}^n \frac{|x|^{\rho'_i - \rho'_1}}{|\tau|^{\rho'_j - \rho'_1}} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{1}{|x+y|^{m+2+\rho'_i - \rho'_j}},$$

que la deuxième inégalité de Birkhoff permet de remplacer par

$$4\pi M C_1 C_2 C_3 C_4 \frac{|g_1(x)|}{|\tau|^{2m+2}} \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{x}{\tau} \right|^{\rho'_i - \rho'_j};$$

il vient donc

$$|R_{x,B}\{R_{x,B}(g_1(x))\}| < \frac{(2M)^2 |g_1(x)|}{n |\tau|^{2m+2}} \sum_{i=1}^n \left| \frac{x}{\tau} \right|^{\rho'_i - \rho'_i}.$$

Ce troisième terme, étant la somme d'une série de termes analytiques, absolument et uniformément convergente dans tout domaine borné de Γ , est lui-même une fonction analytique, et vérifie les inégalités analogues à (25), où M , $2M$ et $m+1$ seraient respectivement remplacés par M^2 , $(2M)^2$, $2m+2$. En poursuivant ce raisonnement, on verra de proche en proche que chaque terme de (15) est une fonction analytique de Γ , le terme de rang $\nu+1$ vérifiant, dans ce domaine, les inégalités

$$(27) \quad \left| R_{x,B} \left\{ R_{x,B} \left\{ \dots \left\{ R_{x,B}(g_1(x)) \right\} \dots \right\} \right\} \right| < \begin{cases} \frac{M^\nu |g_1(x)|}{|x|^{\nu(m+1)}} & (\sigma \geq 0), \\ \frac{(2M)^\nu |g_1(x)|}{n |\tau|^{\nu(m+1)}} \sum_{i=1}^n \left| \frac{x}{\tau} \right|^{\rho'_i - \rho'_i} & (|\tau| \geq 1). \end{cases}$$

On en déduit que (15) est absolument convergente dans Γ , pourvu que R et m aient été pris suffisamment grands. En outre, chacun de ses termes étant analytique, et sa convergence étant uniforme dans toute région bornée de Γ , ce développement représente une fonction analytique dans ce domaine, qui est une solution de l'équation (1). Nous la désignerons par $u_1(x)$. Il résulte d'ailleurs de (27) que l'on a, dans Γ ,

$$(28) \quad |u_1(x) - g_1(x)| < \begin{cases} \frac{M |g_1(x)|}{|x|^{m+1} - M} & (\sigma \geq 0), \\ \frac{1}{n} \frac{2M |g_1(x)|}{|\tau|^{m+1} - 2M} \sum_{i=1}^n \left| \frac{x}{\tau} \right|^{\rho'_i - \rho'_i} & (|\tau| \geq R). \end{cases}$$

En particulier, on en conclut que l'on a, dans Γ ,

$$(29) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^m \left(\frac{u_1(x)}{g_1(x)} - 1 \right) = 0,$$

pourvu que x reste extérieur à un certain angle contenant l'axe réel négatif et limité par deux rayons vecteurs d'argument $\pi - \varepsilon$ et $\pi + \varepsilon$, ε étant un nombre positif arbitrairement petit. Nous désignerons par Γ' le domaine Γ dont aura été exclu cet angle.

Enfin, à l'aide de l'équation (1) elle-même, on sait prolonger analytiquement $u_1(x)$ dans tout le plan, en dehors des points singuliers $\alpha_s - \nu$ et $\beta_s - \nu$, définis comme au paragraphe 4.

En raisonnant de la même manière sur le développement (16) relatif à $g_n(x)$, avec la seule modification que, l'entier $\nu \geq 0$ étant remplacé par l'entier $-\nu \leq 0$, le domaine Γ est remplacé par

$$(\bar{\Gamma}) \quad \begin{cases} |x| \geq R & (\sigma \leq 0), \\ |\tau| \geq R \geq 1 & (\sigma \geq 0), \end{cases}$$

on démontrerait que, pourvu que m et R soient suffisamment grands,

$$\bar{u}_n(x) = g_n(x) + \bar{R}_x.B(g_n(x)) + \bar{R}_x.B\{\bar{R}_x.B(g_n(x))\} + \dots$$

est absolument et uniformément convergente dans toute région bornée de $\bar{\Gamma}$, et définit donc une solution de (1) holomorphe dans ce domaine. Cette fonction peut être prolongée dans tout le plan, sauf aux points $\gamma_s + \nu$, $\beta_s + n + \nu$. Enfin elle satisfait à la relation asymptotique

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^m \left(\frac{\bar{u}_n(x)}{g_n(x)} - 1 \right) = 0,$$

pourvu que x reste extérieur à l'angle aigu compris entre les deux rayons vecteurs d'argument ε et $-\varepsilon$.

Les solutions obtenues semblent dépendre de m . Nous verrons plus loin que cette dépendance n'est qu'apparente, de sorte que les relations asymptotiques trouvées plus haut nous renseigneront complètement sur le caractère de ces fonctions à l'infini.

II. — SYSTÈMES DE SOLUTIONS ACCESSOIRES.

49. On peut déterminer maintenant, à partir de $u_1(x)$, un premier système fondamental de solutions. Remarquons tout d'abord que si $|a_2| = |a_1|$, le raisonnement fait sur $g_1(x)$ s'appliquerait à $g_2(x)$, et fournirait une nouvelle solution $u_2(x)$, vérifiant des relations

asymptotiques analogues à (28) où g'_1 et ρ'_1 seraient remplacés par g'_2 et ρ'_2 . On obtiendra donc, par la méthode du paragraphe précédent, autant de solutions qu'il y a de quantités $|a_i|$ égales à $|a_1|$. Nous n'avons donc à considérer que des $|a_i|$ supérieurs à $|a_1|$; nous supposerons, pour simplifier l'écriture, que $|a_2|$ est le premier d'entre eux.

Nous savons ⁽¹⁾ que la connaissance d'une solution $u_1(x)$ de l'équation (1) permet d'abaisser son ordre d'une unité, en posant

$$(30) \quad u(x) = u_1(x) v(x),$$

et

$$(31) \quad \Delta v(x) = w(x).$$

L'équation obtenue pour $w(x)$ est alors

$$(32) \quad w(x+n-1) + \sum_{i=0}^{n-2} w(x+i) \sum_{s=i+1}^n p_s(x) \frac{u_1(x+s)}{u_1(x+n)} = 0;$$

ses coefficients ont la forme de ceux de l'équation (1), leurs termes constants étant

$$a'_{i,0} = \frac{1}{a_1^n} (a_1^n + a_{n-1,0} a_1^{n-1} + \dots + a_{i+1,0} a_1^{i+1}).$$

Pourtant, ils ne sont pas holomorphes à l'infini, mais on voit sans peine que les raisonnements faits sur les $p_i(x)$ leur sont applicables dans Γ . L'équation caractéristique de (32) est $\frac{1}{a-1} f(a_1 a) = 0$, dont les racines sont

$$\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}, \dots, \frac{a_n}{a_1}, \quad \text{avec} \quad 1 < \left| \frac{a_2}{a_1} \right| \leq \left| \frac{a_3}{a_1} \right| \leq \dots \leq \left| \frac{a_n}{a_1} \right|.$$

D'ailleurs, l'équation en $v(x)$ admettant les solutions formelles

$$\left(\frac{a_{i+1}}{a_1} \right)^x x^{\rho_{i+1}-\rho_1} \frac{1 + \frac{g_1^{(i+1)}}{x} + \frac{g_2^{(i+1)}}{x^2} + \dots}{1 + \frac{g_1^{(i)}}{x} + \frac{g_2^{(i)}}{x^2} + \dots} \quad (i=1, 2, \dots, n-1),$$

l'équation (32) est vérifiée formellement par des développements de

⁽¹⁾ Cf. § 13.

la forme

$$\left(\frac{a_{i+1}}{a_1}\right)^x x^{\rho_{i+1}-\rho_1} \left(\frac{a_{i+1}}{a_1} - 1\right) \left(1 + \frac{l_1^{(i)}}{x} + \frac{l_2^{(i)}}{x^2} + \dots\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

On pourra donc considérer l'équation linéaire d'ordre $n-1$ qui admet les $n-1$ solutions

$$(33) \quad l_i(x) = \left(\frac{a_{i+1}}{a_1}\right)^x x^{\rho_{i+1}-\rho_1} \left(\frac{a_{i+1}}{a_1} - 1\right) \left(1 + \frac{l_1^{(i)}}{x} + \frac{l_2^{(i)}}{x^2} + \dots + \frac{l_m^{(i)}}{x^m}\right),$$

m étant le même entier que plus haut, et écrire les analogues de (10) avec des inégalités (19) valables dans Γ' . On pourra alors trouver une solution $w_1(x)$ de (32), analytique dans Γ , et telle qu'on ait, dans ce domaine,

$$(34) \quad |w_1(x) - l_1(x)| < \begin{cases} \frac{M_1 |l_1(x)|}{|x|^{n+1}} & (\sigma \geq 0), \\ \frac{M_1 |l_1(x)|}{|\tau|^{m+1}} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{x}{\tau} \right|^{\rho'_{i+1}-\rho'_2} & (|\tau| \geq R), \end{cases}$$

où M_1 est une certaine constante. En particulier, on a, dans Γ' ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^m \left(\frac{w_1(x)}{l_1(x)} - 1 \right) = 0.$$

50. Nous aurons une solution de (31) si nous démontrons la convergence de la série

$$(35) \quad v_1(x) = w_1(x-1) + w_1(x-2) + w_1(x-3) + \dots,$$

tout au moins dans le domaine $|\tau| \geq R$, pour lequel tous les points $x - \nu$ appartiennent à Γ . Tout d'abord, la série

$$L_1(x) = l_1(x-1) + l_1(x-2) + l_1(x-3) + \dots$$

est absolument convergente dans ce domaine, car il résulte de (33) que

$$(36) \quad \frac{l_1(x-\nu)}{l_1(x)} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\nu \left(\frac{x-\nu}{x}\right)^{\rho_2-\rho_1} O(1).$$

Si nous considérons alors la série

$$v_1(x) - L_1(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (w_1(x-\nu) - l_1(x-\nu)),$$

il vient, d'après (34) et (36),

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |w_1(x-\nu) - l_1(x-\nu)| < \frac{C |l_1(x)|}{|\tau|^{m+1}} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{x}{\tau} \right|^{\rho'_{i+1} - \rho'_i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{a_1}{a_2} \right|^{\nu} \left| \frac{x-\nu}{x} \right|^{\rho'_{i+1} - \rho'_i}.$$

La dernière somme est bornée, car elle est inférieure à

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{a_1}{a_2} \right|^{\nu} \left(1 + \frac{\nu}{R} \right)^{|\rho'_{i+1} - \rho'_i|},$$

et l'on peut écrire

$$(37) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} |w_1(x-\nu) - l_1(x-\nu)| < \frac{C |l_1(x)|}{|\tau|^{m+1}} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{x}{\tau} \right|^{\rho'_{i+1} - \rho'_i},$$

C désignant une certaine constante, dont la valeur n'est pas nécessairement la même dans les différentes inégalités. Nous avons ainsi démontré la convergence absolue de la série (35), et même sa convergence uniforme dans toute région bornée du domaine $|\tau| \geq R$; on en conclut que sa somme est une fonction de x analytique dans ce domaine.

D'autre part, il résulte de la définition de $l_1(x)$ que l'on a, dans Γ ,

$$l_1(x) = \Delta \frac{g_2(x)}{g_1(x)} + \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^x x^{\rho_1 - \rho_2 - m - 1} O(1),$$

donc

$$\left| L_1(x) - \frac{g_2(x)}{g_1(x)} \right| < C \left| \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^x \right| \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{a_1}{a_2} \right|^{\nu} \frac{1}{|x-\nu|^{m+1-\rho'_2+\rho'_1}};$$

en multipliant par

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^x x^{\rho_1 - \rho_2} O(1),$$

on a donc

$$(38) \quad \left| L_1(x) \frac{g_1(x)}{g_2(x)} - 1 \right| < \frac{C}{|x|^{m+1}} < \frac{C}{|\tau|^{m+1}}.$$

Si nous remarquons que, dans Γ ,

$$\frac{g_2(x)}{g_1(x) l_1(x)} = \frac{1 + \varepsilon}{\frac{a_2}{a_1} - 1},$$

ε étant infiniment petit avec $\frac{1}{|x|}$, on déduit encore, de (38),

$$\frac{L_1(x)}{l_1(x)} = O(1),$$

ce qui permet de remplacer (37) par

$$(39) \quad \left| \frac{v_1(x)}{L_1(x)} - 1 \right| < \frac{C}{|\tau|^{m+1}} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{x}{\tau} \right|^{\rho'_{i+1} - \rho'_i}.$$

Enfin, la multiplication, l'un par l'autre, de $\frac{v_1(x)}{L_1(x)}$ et $\frac{L_1(x)g_1(x)}{g_2(x)}$, tirés des doubles inégalités (38) et (39), donne

$$(40) \quad \left| v_1(x) \frac{g_1(x)}{g_2(x)} - 1 \right| < \frac{C}{|\tau|^{m+1}} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{x}{\tau} \right|^{\rho'_i - \rho'_i}.$$

Ayant construit $v_1(x)$, on connaît, pour l'équation (1), la solution $u_2(x) = u_1(x)v_1(x)$, qui est analytique pourvu que $|\tau|$ soit assez grand, et pour laquelle on déduit, de

$$\left| \frac{u_1(x)}{g_1(x)} - 1 \right| < \frac{C}{|\tau|^{m+1}} \sum_{i=1}^n \left| \frac{x}{\tau} \right|^{\rho'_i - \rho'_i}$$

et de (40),

$$(41) \quad \left| \frac{u_2(x)}{g_2(x)} - 1 \right| < \frac{M_2}{|\tau|^{m+1}} \left| \frac{x}{\tau} \right|^{d_2},$$

d_2 désignant la plus grande des différences

$$\rho'_i + \rho'_j - \rho'_1 - \rho'_2 \quad (i = 1; i, j = 2, 3, \dots, n).$$

Lorsque σ est supérieur ou égal à 0, avec $|\tau| \geq R$, on peut substituer à (41) l'inégalité plus précise

$$(42) \quad \left| \frac{u_2(x)}{g_2(x)} - 1 \right| < \frac{M'_2}{|\tau|^{m+1}}.$$

Reprenons les expressions de $v_1(x)$ et $L_1(x)$, et écrivons

$$v_1(x) - L_1(x) = \sum_{v=1}^k (w_1(x-v) - l_1(x-v)) + \sum_{v=k+1}^{\infty} (w_1(x-v) - l_1(x-v)),$$

k étant la partie entière de $\frac{\sigma}{2}$. Les inégalités (34) donnent alors .

$$|v_1(x) - L_1(x)| < M_1 \sum_{\nu=1}^k \frac{|l_1(x-\nu)|}{|x-\nu|^{m+1}} \\ + \frac{M_1}{|\tau|^{m+1}} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{h=1}^{\infty} |l_1(x-\nu)| \left| \frac{x-\nu}{\tau} \right|^{\rho'_{i+1}-\rho'_i},$$

ou, en tenant compte de (36),

$$(43) \quad |v_1(x) - L_1(x)| \\ < \frac{M_1 |l_1(x)|}{|x|^{m+1}} \left\{ \sum_{\nu=1}^k \left| \frac{a_1}{a_2} \right|^{\nu} \left| \frac{x}{x-\nu} \right|^{m+1-\rho'_2+\rho'_1} \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{x}{\tau} \right|^{m+1+\rho'_{i+1}-\rho'_i} \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \left| \frac{a_1}{a_2} \right|^{\nu} \left| \frac{x-\nu}{x} \right|^{\rho'_{i+1}-\rho'_i} \right\}.$$

L'accolade reste bornée si $|\tau| \geq R$, car $\left| \frac{x}{x-\nu} \right|$ reste borné dans la première somme d'après la manière dont on a choisi k , tandis que la dernière somme écrite est inférieure à $\left| \frac{a_1}{a_2} \right|^k$, à un facteur constant près. On peut donc trouver une constante C telle que l'on ait

$$(44) \quad |v_1(x) - L_1(x)| < \frac{C |l_1(x)|}{|x|^{m+1}} \quad (\sigma \geq 0, |\tau| \geq R).$$

Il n'y a plus qu'à reprendre le calcul qui suit l'inégalité (37). De la même façon, on remplace (44) par

$$\left| \frac{v_1(x)}{L_1(x)} - 1 \right| < \frac{C}{|x|^{m+1}},$$

et enfin, en multipliant, l'un par l'autre, $\frac{v_1(x)}{L_1(x)}$ et $\frac{L_1(x)g_1(x)}{g_2(x)}$ tirés de cette inégalité et de (38), on obtient

$$\left| v_1(x) \frac{g_1(x)}{g_2(x)} - 1 \right| < \frac{C}{|x|^{m+1}};$$

on en déduit (42), comme on a fait pour (41).

On peut appliquer à l'équation (32) les résultats établis pour l'équation (1), ce qui fournit une nouvelle solution $w_2(x)$ de (32)

telle que l'on ait

$$|w_2(x) - l_2(x)| < \begin{cases} \frac{C |l_2(x)|}{|x|^{m+1}} & (\sigma \geq 0, |\tau| \geq R), \\ \frac{C |l_2(x)|}{|\tau|^{m+1}} \left| \frac{x}{\tau} \right|^{d'_2} & (|\tau| \geq R), \end{cases}$$

d'_2 étant la plus grande des quantités

$$\rho'_j + \rho'_n - \rho'_2 - \rho'_3 \quad (j = 2; j, h = 3, 4, \dots, n).$$

On en déduit comme précédemment l'existence d'une solution $u_3(x)$ de (1) vérifiant les inégalités

$$(45) \quad \left| \frac{u_3(x)}{g_3(x)} - 1 \right| < \begin{cases} \frac{M_3}{|x|^{m+1}} & (\sigma \geq 0, |\tau| \geq R), \\ \frac{M_3}{|\tau|^{m+1}} \left| \frac{x}{\tau} \right|^{d'_3} & (|\tau| \geq R), \end{cases}$$

d'_3 désignant la plus grande des quantités

$$\rho'_i + \rho'_j + \rho'_n - \rho'_1 - \rho'_2 - \rho'_3 \quad (i = 1; i, j = 2; i, j, h = 3, 4, \dots, n).$$

De proche en proche, on construira ainsi n solutions $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ de l'équation (1), telles que l'on ait dans Γ' , pour $|\tau| \geq R$,

$$(46) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^m \left(\frac{u_i(x)}{g_i(x)} - 1 \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

D'une manière générale, $u_s(x)$ vérifiera, pour $|\tau| \geq R$, les inégalités de la forme (45), où d'_3 serait remplacé par la plus grande des quantités

$$\rho'_i + \rho'_j + \dots + \rho'_l - \rho'_1 - \rho'_2 - \dots - \rho'_s \quad (i = 1; i, j = 2; \dots; i, j, \dots, l - s, s = 1, \dots, n).$$

On déduit immédiatement de (46) que ces n solutions forment un système fondamental; il suffit d'appliquer les résultats du paragraphe 31.

51. Il nous reste à montrer que les solutions ainsi formées sont indépendantes de m , pourvu que cet entier soit assez grand. Soit $u(x)$ une solution de (1), telle que l'on ait, dans le domaine $|\tau| \geq R$,

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} x^m \left(\frac{u(x)}{g_i(x)} - 1 \right) = 0,$$

$u(x)$ étant nécessairement de la forme

$$u(x) = \sum_{h=1}^n \pi_h(x) u_h(x),$$

on aura, si x prend la suite des valeurs $x_0 + v$, où x_0 est un point fixe,

$$\lim_{v \rightarrow \infty} (x_0 + v)^m \left(\sum_{h=1}^n \pi_h(x_0) \frac{u_h(x_0 + v)}{g_i(x_0 + v)} - 1 \right) = 0,$$

ou encore, en vertu de (46),

$$\lim_{v \rightarrow \infty} v^m \left(\sum_{h=1}^n \pi_h(x_0) \frac{g_h(x_0 + v)}{g_i(x_0 + v)} - 1 \right) = 0.$$

En introduisant les expressions asymptotiques des $\frac{g_h}{g_i}$, il vient

$$\lim_{v \rightarrow \infty} v^m \left[\sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^n \pi_h(x_0) \left(\frac{a_h}{a_i} \right)^{x_0 + v} v^{\rho_h - \rho_i} + \pi_i(x_0) - 1 \right] = 0.$$

Si nous supposons que m est supérieur à toutes les différences $\rho'_i - \rho'_h$, nous pourrions écrire

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left[\sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^n \pi_h(x_0) \left(\frac{a_h}{a_i} \right)^{x_0 + v} v^{m'_h + v^m (\pi_i(x_0) - 1)} \right] = 0,$$

tous les exposants m'_h étant positifs. Ceci doit subsister si x_0 est remplacé par $x_0 + s$, s étant un entier quelconque. Tous les $\frac{a_h}{a_i}$ étant distincts, on voit, en donnant à s des valeurs entières successives, que les limites des n termes du crochet doivent être nulles; tous les coefficients $\pi_h(x_0)$ pour lesquels $\left| \frac{a_h}{a_i} \right| \geq 1$ doivent donc être nuls, ainsi que $\pi_i(x_0) - 1$. On a ainsi démontré que $u(x)$ est nécessairement de la forme

$$u(x) = \pi_1(x) u_1(x) + \pi_2(x) u_2(x) + \dots + \pi_{i-1}(x) u_{i-1}(x) + u_i(x).$$

En prenant successivement $i = 1, 2, 3, \dots$, on voit que les relations

asymptotiques (46) caractérisent u_1, u_2, \dots, u_n , pourvu que m soit assez grand, et, par suite, que, dans ces conditions, nos solutions sont indépendantes de m .

En particulier, on voit que, si toutes les différences $\rho'_h - \rho'_i$, pour lesquelles $\left| \frac{a_h}{a_i} \right| \geq 1$, sont positives, il suffit de prendre $m = 0$.

Nous pouvons donc énoncer le

THÉORÈME. — *Étant donnée une équation linéaire aux différences finies d'ordre n , dont les coefficients $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ sont holomorphes à l'infini, les deux coefficients extrêmes n'y étant pas nuls, et dont l'équation caractéristique a ses n racines a_1, a_2, \dots, a_n distinctes, on peut construire un système fondamental de solutions $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$, holomorphes à l'extérieur d'une bande $|\tau| < R$, et satisfaisant dans Γ' , pour $|\tau| \geq R$, aux relations asymptotiques*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^m \left(\frac{u_i(x)}{g_i(x)} - 1 \right) = 0,$$

et cela quelque grand que soit l'entier m .

La suite des opérations que l'on vient d'effectuer à partir de $u_1(x)$ aurait pu l'être, *mutatis mutandis*, à partir de $\bar{u}_n(x)$. On aurait ainsi abouti à un système fondamental de solutions $\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x), \dots, \bar{u}_n(x)$ holomorphes dans un domaine $\bar{\Gamma}$, dont serait exclu un angle arbitrairement petit contenant l'axe positif.

III. — SYSTÈMES DE SOLUTIONS PRINCIPALES.

32. Les solutions $u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x)$ n'ont été définies qu'à l'extérieur de la bande $|\tau| < R$; ceci se comprend si l'on remarque qu'il résulte de (35) que $v_1(x)$ admet pour points singuliers tous les $\alpha_i \pm \nu, \beta_i \pm \nu$. Cependant, il est possible de former un système de solutions analytiques dans tout le domaine Γ .

Cette propriété appartient déjà à $u_1(x)$, ainsi qu'aux $u_i(x)$ pour lesquels $|a_i| = |a_1|$, et que l'on a déterminés comme on a fait pour $u_1(x)$. Supposons donc encore $|a_2| > |a_1|$. Posons $a_k = r_k e^{i\theta_k}$, et reprenons la solution $w_1(x)$ de l'équation (32). Une solution corres-

pondante de l'équation (31) est représentée par l'intégrale de Guichard

$$(47) \quad V_1(x) = \int_L \frac{e^{-2\pi i \lambda (x-z)}}{1 - e^{2\pi i (x-z)}} w_1(z) dz,$$

où λ est un nombre entier dont nous préciserons la valeur. La ligne d'intégration L est un lacet EFGH, intérieur à Γ , dont les deux branches rectilignes $E_{-\infty}F$ et $G_{-\infty}H$ sont parallèles à l'axe réel, respectivement au-dessous et au-dessus de cet axe, et qui sépare les points $x - 1 - \nu$ des points $x + \nu$. Il résulte évidemment de (34) que cette intégrale est convergente, car $\left| \frac{a_2}{a_1} \right| > 1$; elle ne dépend pas de l'arbitraire qui subsiste dans le choix de Γ , et elle converge uniformément dans toute région bornée de Γ , pourvu que L se déforme au besoin quand x se déplace. Elle définit donc une fonction de x analytique dans Γ .

Pour vérifier que c'est une solution de (31), il suffit de remarquer que, grâce à la périodicité du facteur de $w_1(z)$,

$$V_1(x+1) = \int_{L'} \frac{e^{-2\pi i \lambda (x'-z)}}{1 - e^{2\pi i (x'-z)}} w_1(z) dz,$$

le chemin de L' étant le lacet EFF'G'GH, analogue à L , mais relatif à $x+1$; on a donc

$$\Delta V_1(x) = \int_{FF'G'GF} \frac{e^{-2\pi i \lambda (x-z)}}{1 - e^{2\pi i (x-z)}} w_1(z) dz = w_1(x).$$

Le produit de $u_1(x)$ et $V_1(x)$ fournit donc une solution

$$U_2(x) = u_1(x) V_1(x)$$

de l'équation (1), et cette solution est analytique dans Γ .

53. L'étude de $U_2(x)$ au voisinage de l'infini sera une conséquence de l'étude de $V_1(x)$. Pour obtenir une limite supérieure de la croissance de cette dernière, il est pratique de prendre pour L un chemin comprenant une partie fixe L_1 de même forme que EFGH, soit ABCD, assujettie seulement à entourer la région du plan extérieure à Γ , et une partie mobile L_2 définie de la façon suivante. Si x est au-dessus ou au-dessous de L_1 , L_2 est un lacet rectiligne et direct, parallèle à l'axe réel, tout entier au-dessus ou au-dessous de L_1 , et séparant les points $x - 1 - \nu$ des points $x + \nu$. Si x est compris entre

qu'appartient une propriété de cette nature. On peut donc poser

$$(48) \quad I_{L_1} = q(x) \begin{cases} 1, \\ e^{-2\pi i \lambda x}, \\ e^{-2\pi i (\lambda+1)x}, \end{cases}$$

suivant que x est intérieur à $D'CBA'$, au-dessus de DD' , ou au-dessous de AA' , et $q(x)$ restant borné en tous les points extérieurs à L_1 et qui sont à une distance supérieure à une quantité positive des lignes congruentes de L_1 .

Dans l'étude de I_{L_2} , deux cas sont à distinguer. Si x est au-dessous de AA' , ou au-dessus de DD' , on a évidemment

$$I_{L_2} = w_1(x-1) + w_1(x-2) + w_1(x-3) + \dots = v_1(x),$$

dont nous connaissons le caractère asymptotique dans ces régions. Si x est intérieur à $D'CBA'$, on a

$$I_{L_2} = w_1(x-1) + w_1(x-2) + \dots + w_1(x-h),$$

$x-h$ étant le plus à gauche ⁽¹⁾ des points $x-v$ qui soit extérieur à L_1 , donc intérieur à L_2 . Or, on peut appliquer, à cette somme d'un nombre fini de termes, le raisonnement qui nous a conduits à (42); en supposant que σ est assez grand pour que h ne soit pas inférieur à la partie entière k de $\frac{\sigma}{2}$, on écrira, de manière analogue,

$$\left| I_{L_2} - \sum_{v=1}^h I_1(x-v) \right| < \frac{M_1 |I_1(x)|}{|x|^{m+1}} \left\{ \sum_{v=1}^k \left| \frac{a_1}{a_2} \right|^v \left| \frac{x}{x-v} \right|^{m+1-\rho'_2+\rho'_1} \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{x}{\tau} \right|^{m+1+\rho'_{i+1}-\rho'_i} \sum_{v=k+1}^h \left| \frac{a_1}{a_2} \right|^v \left| \frac{x-v}{x} \right|^{\rho'_{i+1}-\rho'_i} \right\}.$$

L'accolade est encore bornée quand σ augmente indéfiniment, et l'on en déduit, comme plus haut, que l'on a

$$(49) \quad \left| I_{L_2} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} - 1 \right| < \frac{C}{|x|^{m+1}}$$

à l'intérieur de $D'CBA'$, pourvu que x reste à une distance des

(1) Il est clair que $I_{L_1} = 0$ si $x-1$ est intérieur à L_1 .

lignes congruentes de L_1 supérieure à une quantité positive. Avec cette restriction, (49) est donc valable dans le domaine Γ .

Formons de même $I_{L_1} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$, qui admet, dans le domaine en question, la valeur asymptotique

$$I_{L_1} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^x x^{\rho_1 - \rho_2} O(1).$$

Dans les régions situées à droite de $D' C B A'$, au-dessus de DD' , ou au-dessous de AA' , cette expression est respectivement de la forme

$$(50) \quad x^{\rho_1 - \rho_2} q(x) O(1) \begin{cases} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^x, \\ e^{\sigma \log \left| \frac{a_1}{a_2} \right| + 2\pi i \mu \tau}, \\ e^{\sigma \log \left| \frac{a_1}{a_2} \right| + 2\pi i (\mu + 1) \tau} \end{cases}$$

où $\mu = \lambda + \frac{\xi_2 - \xi_1}{2\pi}$. La première quantité est infiniment petite quand σ augmente indéfiniment, car $\left| \frac{a_1}{a_2} \right| < 1$. Les deux autres seront également infiniment petites avec $\frac{1}{x}$ dans toute portion de leur domaine correspondant, limitée à gauche, pourvu que μ soit compris entre 0 et -1 , c'est-à-dire si λ est le plus grand entier inférieur à $\frac{\xi_1 - \xi_2}{2\pi}$, supposé lui-même non entier. Dans ces conditions, $I_{L_1} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ tendra vers zéro plus vite que toute puissance de x , dans toute portion, limitée arbitrairement à gauche, du domaine considéré extérieur à L_1 . Dans toute région de cette nature, on a donc

$$(51) \quad \left| V_1(x) \frac{g_1(x)}{g_2(x)} - 1 \right| < \frac{C}{|x|^{m+1}}.$$

Enfin, le rôle de L_1 ayant pris fin dans cette dernière inégalité, celle-ci est vraie dans toute portion de Γ limitée arbitrairement à gauche.

Dans le cas exceptionnel où a_1 et a_2 sont sur le même rayon vecteur, soit $\xi_1 = \xi_2$, les deux dernières expressions (50) ne peuvent pas tendre toutes deux vers zéro lorsque τ tend respectivement vers $+\infty$ et vers $-\infty$. Si l'on prend, par exemple, $\lambda = 0$, l'exposant

de e dans la deuxième expression (50) se réduit à $\sigma \log \left| \frac{a_1}{a_2} \right|$; cette expression tend donc encore vers zéro plus vite que toute puissance de x , pourvu que σ augmente indéfiniment.

On voit donc que si l'on convient de prendre λ égal au plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{\xi_1 - \xi_2}{2\pi}$, la fonction $V_1(x)$ définie par l'intégrale (47) vérifie la relation asymptotique (51) quand x s'éloigne à l'infini dans Γ , le long de toute direction telle que $-\frac{\pi}{2} \leq \arg x \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, ε étant un nombre positif arbitrairement petit, qui peut se réduire à zéro si a_1 et a_2 ne sont pas sur un même rayon vecteur.

En ce qui concerne $U_2(x)$, on déduit de là, comme on a fait au paragraphe 50 pour obtenir (42), que l'on a, dans les mêmes conditions que (51),

$$(52) \quad \left| \frac{U_2(x)}{g_2(x)} - 1 \right| < \frac{C}{|x|^{m+1}}.$$

54. En appliquant ces résultats à l'équation (32), on peut former, à partir de $w_1(x)$, une autre solution $W_2(x)$, définie dans Γ . Les propriétés asymptotiques de $W_2(x)$ étant analogues à celles de $w_1(x)$, l'intégrale de Guichard construite avec cette nouvelle fonction aura les propriétés de (47), de sorte que la fonction $V_2(x)$ qu'elle définira vérifiera une inégalité analogue à (51), où $\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ serait remplacé par $\frac{I_1(x)}{I_2(x)}$. La solution $U_3(x) = U_2(x)V_2(x)$, qu'on en déduit pour l'équation (1), sera donc analytique dans Γ , et satisfera à une relation asymptotique

$$\left| \frac{U_3(x)}{g_3(x)} - 1 \right| < \frac{C}{|x|^{m+1}},$$

dans les conditions énoncées pour (52).

A l'aide du même procédé, on peut former une nouvelle solution $W_3(x)$ de (32), et, par suite, une quatrième solution $U_4(x)$ de (1), et ainsi de suite jusqu'à $U_n(x)$. Ces n solutions $u_i = U_1, U_2, \dots, U_n$ sont analytiques dans Γ , donc dans tout le plan en dehors des points $z_s = \gamma$ et $\bar{z}_s = \gamma$, et elles vérifient les relations asymptotiques

$$(53) \quad \left| \frac{U_i(x)}{g_i(x)} - 1 \right| < \frac{C}{|x|^{m+1}} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

dans toute région de Γ telle que $-\frac{\pi}{2} \leq \arg(x - x_0) \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, x_0 étant un point fixe quelconque, et ε étant un nombre positif arbitrairement petit. En outre, on peut prendre $\varepsilon = 0$ si tous les α_i sont sur des rayons vecteurs différents.

Des relations asymptotiques on déduit comme plus haut que ces n solutions forment un système fondamental. On peut donc énoncer le

THÉORÈME.—*Étant donnée une équation linéaire aux différences finies d'ordre n , dont les coefficients $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ sont holomorphes à l'infini, avec $p_0(\infty) \neq 0$, $p_n(\infty) \neq 0$, et dont l'équation caractéristique a toutes ses racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ distinctes, on peut construire un système fondamental de solutions $U_1(x)$, $U_2(x)$, ..., $U_n(x)$ analytiques dans tout le plan, sauf aux points $\alpha_s - \nu$ et $\beta_s - \nu$, et vérifiant généralement les relations asymptotiques (53), quelque grand que soit l'entier positif m , dans toute région de Γ limitée à gauche.*

Cependant, si plusieurs α_i sont sur un même rayon vecteur, la démonstration ne s'applique que dans un angle

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg(x - x_0) \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Remarquons que, dans ce dernier cas, on aurait pu aussi bien, en prenant $\lambda = -1$ au lieu de $\lambda = 0$, former des solutions pour lesquelles la restriction introduite avec ε s'appliquerait au demi-plan inférieur au lieu du demi-plan supérieur.

Enfin, on démontrerait de même l'existence de solutions $\bar{U}_1(x)$, $\bar{U}_2(x)$, ..., $\bar{U}_n(x)$ analytiques dans tout le plan, sauf aux points $\gamma_s + \nu$, $\beta_s + n + \nu$, et satisfaisant aux relations asymptotiques (53) dans toute région de $\bar{\Gamma}$ limitée arbitrairement à droite, avec une restriction analogue si plusieurs des α_i sont sur un même rayon vecteur.

et les points singuliers essentiels des coefficients de ces équations sont ceux des $p_i^{(j)}(x)$; leurs pôles seront désignés par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ (1') permet donc de prolonger les $u_i(x)$ en tous les points du demi-plan $\sigma < c$, autres que les $\alpha_s - \nu$ et les $\beta_s - \nu$.

Nous désignerons par $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ les ensembles des points $\alpha_s - \nu, \beta_s \pm \nu, \gamma_s + \nu$, et nous appellerons « points singuliers du système (1) » les $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$, en y joignant, s'il y a lieu, le point à l'infini.

Il est donc aisé de former des solutions de (1); mais, comme dans le cas de l'équation linéaire, ces solutions admettent les droites $\sigma = c \pm \nu$ pour lignes de discontinuité, si l'on se donne arbitrairement les conditions initiales. Le raisonnement suivi montre d'ailleurs que, si l'on désigne par $\pi_i(x)$ la fonction périodique de période 1 qui coïncide avec $u_i(x)$ dans la bande initiale, les valeurs trouvées pour les $u_i(x)$ en dehors de cette bande sont des formes linéaires des $\pi_h(x)$

$$u_i(x) = \sum_{h=1}^n \pi_h(x) u_i^{(h)}(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

les n systèmes des $u_1^{(h)}(x), u_2^{(h)}(x), \dots, u_n^{(h)}(x)$ ($h = 1, 2, \dots, n$) constituent n solutions particulières, mais ces solutions sont formées d'une infinité de fonctions rationnelles des $p_i^{(j)}(x)$, les lignes de discontinuité étant les droites $\sigma = c \pm \nu$.

56. Nous dirons que n solutions de (1), $u_1^{(h)}(x), u_2^{(h)}(x), \dots, u_n^{(h)}(x)$ ($h = 1, 2, \dots, n$) forment un système fondamental de solutions s'il n'existe pas de relations simultanées de la forme

$$\sum_{h=1}^n \pi_h(x) u_i^{(h)}(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où les $\pi_h(x)$ soient des fonctions périodiques [$\pi_h(x+1) = \pi_h(x)$] telles qu'il existe une valeur au moins de x , non congruente à un point singulier du système (1), pour laquelle elles sont finies et non simultanément nulles.

(1) C'est-à-dire non telle que l'un des points $x \pm \nu$ soit un point singulier du système.

La considération du déterminant

$$D(x) = \begin{vmatrix} u_1^{(1)}(x) & u_1^{(2)}(x) & \dots & u_1^{(n)}(x) \\ u_2^{(1)}(x) & u_2^{(2)}(x) & \dots & u_2^{(n)}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n^{(1)}(x) & u_n^{(2)}(x) & \dots & u_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

permet de dire, d'une manière équivalente, que *n solutions* $u_1^{(h)}(x)$, $u_2^{(h)}(x)$, ..., $u_n^{(h)}(x)$ du système (1) forment un système fondamental si le déterminant $D(x)$ ne s'annule en aucun point non congruent à un point singulier du système.

La démonstration peut être copiée sur le raisonnement du paragraphe 2, en remarquant que $D(x)$ vérifie ici l'équation aux différences finies

$$(2) \quad D(x+1) = H(x) D(x),$$

comme le montre la multiplication des deux déterminants au second membre, compte tenu de (1).

Citons encore le criterium suivant, dont l'équivalence avec le précédent est évidente : les $u_i^{(h)}(x)$ forment un système fondamental de solutions s'il n'existe pas de relations simultanées de la forme

$$\sum_{i=1}^n \pi_i(x) u_i^{(h)}(x) = 0 \quad (h=1, 2, \dots, n).$$

Étant donné un système fondamental de solutions $u_i^{(h)}(x)$, il est clair que tout système de n formes linéaires à coefficients périodiques

$$(3) \quad u_i(x) = \sum_{h=1}^n \pi_h(x) u_i^{(h)}(x) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

constitue lui-même une solution. (3) représente d'ailleurs la solution générale de (1). En effet si $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ est une solution quelconque de ce système, les n systèmes ($i=1, 2, \dots, n$) de $n+1$ équations

$$u_i(x+1) = \sum_{j=1}^n p_i^{(j)}(x) u_j(x),$$

$$u_i^{(h)}(x+1) = \sum_{j=1}^n p_i^{(j)}(x) u_j^{(h)}(x) \quad (h=1, 2, \dots, n)$$

entraînent

$$(4) \quad \begin{vmatrix} u_i(x+1) & u_1(x) & \dots & u_n(x) \\ u_i^{(1)}(x+1) & u_1^{(1)}(x) & \dots & u_n^{(1)}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_i^{(n)}(x+1) & u_1^{(n)}(x) & \dots & u_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

en tout point α non congruent à un point singulier. Il existe donc $n+1$ fonctions périodiques $\pi(x), \pi_1(x), \dots, \pi_n(x)$ telles que l'on ait

$$\pi(x) u_i(x) = \sum_{h=1}^n \pi_h(x) u_i^{(h)}(x) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$\pi(x)$ n'étant nul en aucun point α , parce que les $u_i^{(h)}(x)$ forment un système fondamental.

Remarquons que les n équations (4) constituent le système d'équations linéaires qui admet un système fondamental de solutions donné.

Les coefficients $\pi_h(x)$ des expressions (3) de solutions $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$, prenant des valeurs données $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ dans une bande $c \leq \sigma < c+1$, sont donnés par les n équations

$$\varphi_i(x) = \sum_{h=1}^n \pi_h(x) u_i^{(h)}(x) \quad (c \leq \sigma < c+1; i=1, 2, \dots, n).$$

Enfin, étant donné un système fondamental de solutions $u_i^{(h)}(x)$, tout autre système fondamental de solutions $\bar{u}_i^{(h)}(x)$ est de la forme

$$\bar{u}_i^{(h)}(x) = \sum_{j=1}^n \pi_{h,j}(x) u_i^{(j)}(x) \quad (i, h=1, 2, \dots, n),$$

les $\pi_{h,j}(x)$ étant des fonctions périodiques, dont le déterminant $|\pi_{j,h}(x)|$ ne s'annule en aucun point α non congruent à un point singulier de (1), et réciproquement. En effet, le déterminant $\bar{D}(x)$ des $\bar{u}_i^{(h)}(x)$ est

$$\bar{D}(x) = D(x) |\pi_{j,h}(x)|.$$

37. Nous allons voir que l'on peut déterminer, dans des conditions très générales, un système fondamental de solutions analytiques $u_i^{(h)}(x)$,

ou, en résolvant ces équations de proche en proche,

$$(9) \quad R_i^{(k)}(\nu, x) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{\nu-1}=1}^n \bar{p}_{j_1}^{(j_1)}(x) \bar{p}_{j_2}^{(j_2)}(x+1) \dots \bar{p}_{j_{\nu-1}}^{(j_{\nu-1})}(x+\nu-1) \quad (\nu > 0).$$

On déduit de même de (6) que

$$(9') \quad \left\{ \begin{array}{l} R_i^{(k)}(-1, x) = p_i^{(k)}(x-1), \\ \dots \dots \dots \\ R_i^{(k)}(-\nu, x) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{\nu-1}=1}^n p_{j_1}^{(j_1)}(x-1) p_{j_2}^{(j_2)}(x-2) \dots p_{j_{\nu-1}}^{(j_{\nu-1})}(x-\nu) \quad (\nu > 0). \end{array} \right.$$

Ces deux systèmes sont encore équivalents aux équations récurrentes ($\nu = 1, 2, 3, \dots$)

$$(10) \quad R_i^{(k)}(\nu, x) = \sum_{j=1}^n R_i^{(j)}(\nu-1, x) \bar{p}_j^{(k)}(x+\nu-1),$$

$$(10') \quad R_i^{(k)}(-\nu, x) = \sum_{j=1}^n R_i^{(j)}(-\nu+1, x) p_j^{(k)}(x-\nu).$$

La résolution des n équations générales (10') ($k = 1, 2, \dots, n$) par rapport aux $R_i^{(j)}(-\nu+1, x)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) montre que (10) est vrai quel que soit ν . Il en est de même pour (10').

Les fonctions $R_i^{(k)}(\nu, x)$ apparaissent également lorsqu'on cherche à exprimer les valeurs $u_i(x+\nu)$ d'une solution en fonction des $u_k(x)$. On déduit en effet de (1), par récurrence, que, pour les valeurs positives de ν ,

$$(11) \quad u_i(x+\nu) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{\nu-1}=1}^n \sum_{k=1}^n p_{j_1}^{(j_1)}(x+1) p_{j_2}^{(j_2)}(x+2) \dots p_{j_{\nu-1}}^{(j_{\nu-1})}(x) u_k(x),$$

et par suite, grâce à (9'),

$$(12) \quad u_i(x+\nu) = \sum_{k=1}^n R_i^{(k)}(-\nu, x+1) u_k(x).$$

En utilisant les équations (1') et (9), on vérifierait que la relation (12) est valable quel que soit l'entier ν . On voit ainsi que la série (5) est semblable aux séries zétafuchsiennes de H. Poincaré (1).

(1) *Acta mathematica*, t. 5, 1884, p. 209-278.

58. Les équations que l'on est conduit à écrire pour les systèmes d'équations aux différences prennent une forme symbolique simple lorsqu'on utilise la notation des matrices. Si l'on désigne par $P(x)$ la matrice des coefficients $p_i^{(j)}(x)$ du système (1), et par $u(x)$ la matrice d'un système fondamental de solutions $u_i^{(h)}(x)$ de ce système, les équations

$$u_i^{(h)}(x+1) = \sum_{j=1}^n p_i^{(j)}(x) u_j^{(h)}(x)$$

peuvent s'écrire

$$u(x+1) = P(x) u(x).$$

On en déduit immédiatement les équations

$$u(x+v) = P(x+v-1) \dots P(x+1) P(x) u(x) \quad (v > 0),$$

qui sont équivalentes à (11).

En désignant par $\bar{P}(x)$ la matrice inverse de $P(x)$, dont les éléments sont les $\bar{p}_i^{(j)}(x)$, on a de même

$$\begin{aligned} u(x-1) &= \bar{P}(x-1) u(x), \\ u(x-v) &= \bar{P}(x-v) \dots \bar{P}(x-2) \bar{P}(x-1) u(x) \quad (v > 0). \end{aligned}$$

On voit que les $R_i^{(h)}(v, x)$ sont les éléments des matrices

$$(13) \quad R(v, x) = \bar{P}(x) \bar{P}(x+1) \dots \bar{P}(x+v-1) \quad (v > 0),$$

$$(13') \quad R(v, x) = P(x-1) P(x-2) \dots P(x+v) \quad (v < 0),$$

et l'on peut écrire, quel que soit le signe de v ,

$$u(x+v) = R(-v, x+v) u(x).$$

Signalons à ce sujet la remarque de G. D. Birkhoff ⁽¹⁾ que, si les produits infinis de la forme (13) et (13') admettent des matrices limites, celles-ci représentent deux systèmes de solutions de (1). C'est ce qui se produit, par exemple, si

$$p_i^{(j)}(x) = \varepsilon_{ij} + \frac{\mu_i^{(j)}(x)}{x^2},$$

les $\mu_i^{(j)}(x)$ étant holomorphes à l'infini. Les équations (10) montrent

(1) *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 12, 1911, p. 243-284.

d'ailleurs que ces limites ne peuvent exister que si $P(x)$ se réduit, à l'infini, à la matrice unité.

59. Faisons l'hypothèse que les $p_i^{(j)}(x)$ sont non seulement analytiques mais encore tels qu'on sache trouver un nombre $M > 1$ et un entier $p \geq 0$, grâce auxquels on ait

$$(14) \quad |\bar{p}_i^{(j)}(x + \nu)| < M e^{\nu^p}, \quad |p_i^{(j)}(x - \nu)| < M e^{\nu^p},$$

quel que soit x dans Γ et quel que soit l'entier positif ν . Par exemple, ceci est toujours possible si les $p_i^{(j)}(x)$ sont des fonctions entières d'ordre fini.

Dans ces conditions, les formules récurrentes montrent, en suivant le raisonnement et la notation du paragraphe 5, que l'on a, dans Γ ,

$$|R_i^{(k)}(\pm s, x)| < n^s M^s e^{(s-1)p},$$

s prenant toutes les valeurs entières positives. On assurera donc la convergence, dans ce domaine, de tout système ($k = 1, 2, \dots, n$) de n séries

$$u_i(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} R_i^{(k)}(\nu, x) f(x + \nu) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

en prenant

$$f(x) = e^{-x^{p+1}},$$

et il résultera de l'uniformité de la convergence que les solutions ainsi formées seront holomorphes dans Γ .

Pour montrer l'existence d'un système fondamental de solutions holomorphes dans Γ , prenons

$$f(x) = \frac{\sin \pi(x-a)}{\pi(x-a)} e^{-x^{p+1}},$$

a désignant un point de Γ , et formons les n solutions ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$u_i^{(k)}(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} R_i^{(k)}(\nu, x) f(x + \nu) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

On a évidemment

$$u_i^{(k)}(a) = R_i^{(k)}(0, a) = \varepsilon_{ik},$$

donc le déterminant $D(x)$ de ces n solutions est égal à 1 au point a . Comme au paragraphe 5, on déduit de là que ces n solutions forment

un système fondamental, ou permettent tout au moins d'en former un au bout d'un nombre fini d'opérations.

Au point de vue des singularités des solutions ainsi formées, les relations (10) et (10') montrent tout de suite que les points des ensembles (α) et (γ) sont des pôles; les autres points singuliers seront en général essentiels. Bien plus, la simple inspection de ces équations nous apprend que les remarques faites, au paragraphe 6, sur les ordres de multiplicité des pôles des solutions de l'équation linéaire formées de manière analogue, sont valables ici sans modification. En particulier, *un système d'équations linéaires à coefficients rationnels admet un système fondamental de solutions méromorphes.*

Notons également que, de la même manière que dans le paragraphe 7, on peut supprimer l'hypothèse relative à l'ordre de la croissance des coefficients du système, si l'on ne considère que les valeurs réelles de la variable.

II. — SYSTÈME ADJOINT.

60. Considérons un système fondamental de solutions $u_i^{(k)}(x)$, $u_2^{(k)}(x)$, ..., $u_n^{(k)}(x)$ d'un système d'équations (1). Désignons par $D[u(x)]$ le déterminant de ces n^2 fonctions, et par $w_i^{(k)}(x)$ les éléments réciproques

$$w_i^{(k)}(x) = \frac{1}{D[u(x)]} \frac{\partial D[u(x)]}{\partial u_i^{(k)}(x)}.$$

On a donc

$$(15) \quad \sum_{i=1}^n u_i^{(h)}(x) w_i^{(k)}(x) = \varepsilon_{kh},$$

$$(15') \quad \sum_{k=1}^n w_i^{(k)}(x) w_j^{(k)}(x) = \varepsilon_{ij}.$$

L'un ou l'autre de ces deux systèmes définit complètement les $w_i^{(k)}(x)$.

Si l'on remplace, dans (15), x par $x+1$ et les $u_i^h(x+1)$ en

fonction des $u_j^{(h)}(x)$, il vient

$$\sum_{j=1}^n u_j^{(h)}(x) \sum_{i=1}^n p_i^{(j)}(x) \omega_i^{(h)}(x+1) = \varepsilon_{kh};$$

la comparaison avec ces mêmes équations (15) donne donc

$$\omega_j^{(h)}(x) = \sum_{i=1}^n p_i^{(j)}(x) \omega_i^{(h)}(x+1),$$

ou, en résolvant ces équations par rapport aux $\omega_i^{(h)}(x+1)$,

$$(16) \quad \omega_i^{(h)}(x+1) = \sum_{j=1}^n \bar{p}_j^{(i)}(x) \omega_j^{(h)}(x).$$

Les $\omega_i^{(h)}(x)$ forment ainsi n solutions du système d'équations

$$(17) \quad u_i(x+1) = \sum_{j=1}^n \bar{p}_j^{(i)}(x) u_j(x).$$

Nous appellerons (17) le *système d'équations adjoint* de (1). Inversement il résulte de la symétrie des équations (15) que (1) est l'adjoint de (17). En outre, les $\omega_i^{(h)}(x)$ forment un système fondamental, car il résulte de (15) que

$$D[u(x)] D[w(x)] = 1.$$

Le système fondamental des $\omega_i^{(h)}(x)$ sera dit *adjoint* au système des $u_i^{(h)}(x)$, chaque élément $\omega_i^{(h)}(x)$ étant dit, plus spécialement, *adjoint à l'élément* $u_i^{(h)}(x)$ dans le système fondamental considéré. Cette correspondance est réciproque.

Deux solutions quelconques de deux systèmes adjoints d'équations vérifient une relation remarquable. Les solutions générales de ces deux systèmes étant, en effet, de la forme

$$u_i(x) = \sum_{h=1}^n \pi_h(x) u_i^{(h)}(x),$$

$$\omega_i(x) = \sum_{k=1}^n \bar{\pi}_k(x) \omega_i^{(k)}(x),$$

on vérifie immédiatement, grâce à (15), que (1)

$$\Delta \sum_{i=1}^n u_i(x) w_i(x) = \Delta \sum_{n=1}^n \pi_n(x) \bar{\pi}_n(x) = 0.$$

En particulier, si un système est son propre adjoint, autrement dit, si ses coefficients sont les éléments d'un déterminant orthogonal, toute solution de ce système est telle que

$$\sum_{i=1}^n u_i(x)^2 = \pi(x).$$

En appliquant au système (17) les formules (9) et (9'), on voit que les fonctions $\bar{R}_i^{(k)}(\nu, x)$ relatives à ce système sont

$$(18) \quad \bar{R}_i^{(k)}(\nu, x) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{\nu-1}=1}^n p_{j_1}^{(i)}(x) p_{j_2}^{(j_1)}(x+1) \dots p_{j_{\nu-1}}^{(j_{\nu-2})}(x+\nu-1),$$

$$(18') \quad \bar{R}_i^{(k)}(-\nu, x) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{\nu-1}=1}^n \bar{p}_{j_1}^{(i)}(x-1) \bar{p}_{j_2}^{(j_1)}(x-2) \dots \bar{p}_{j_{\nu-1}}^{(j_{\nu-2})}(x-\nu+1).$$

où $\nu = 1, 2, 3, \dots$. La comparaison de (18) et (18') à ces formules (9) et (9') montre que l'on a, pour toutes les valeurs entières de ν ,

$$(19) \quad \bar{R}_i^{(k)}(\nu, x) = R_k^{(i)}(-\nu, x+\nu).$$

Ces équations permettent de donner aux équations (12) la forme remarquablement simple

$$u_i(x+\nu) = \sum_{k=1}^n \bar{R}_k^{(i)}(\nu, x) u_k(x);$$

on a de même

$$w_i(x+\nu) = \sum_{k=1}^n R_k^{(i)}(x+\nu) w_k(x).$$

(1) La périodicité de la somme $\sum_{i=1}^n u_i(x) w_i(x)$ peut encore se vérifier directement à l'aide des équations (1) et (17).

Ces relations sont encore équivalentes aux formules

$$(20) \quad \sum_{k=1}^n u_k^{(j)}(x) \omega_f^{(k)}(x + y) = R_f^{(j)}(y, x).$$

Il résulte de la définition du système adjoint que les résolutions de deux systèmes adjoints d'équations aux différences sont deux problèmes équivalents. D'une manière générale, la connaissance de m solutions linéairement distinctes de l'un permet de réduire l'autre à $n - m$ équations. En effet, si $\omega_1^{(s)}(x), \omega_2^{(s)}(x), \dots, \omega_n^{(s)}(x)$ ($s = 1, 2, \dots, m$) sont m solutions linéairement distinctes de (17), on peut écrire, entre les éléments de toute solution de (1), m relations

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^{(s)}(x) u_i(x) = \pi_s(x),$$

les $\pi_s(x)$ étant n fonctions périodiques quelconques. Ces m relations permettent, par élimination, de ne conserver que $n - m$ des inconnues de (1). Cependant il faut remarquer que les $n - m$ équations obtenues possèdent des termes non homogènes, qui sont des formes linéaires des m arbitraires $\pi_s(x)$.

61. L'analogie de tous ces résultats avec ceux que nous avons obtenus au Chapitre I pour l'équation linéaire d'ordre n s'expliquent par l'équivalence de cette équation avec un certain système de n équations linéaires. Il résulte, en effet, du système

$$(21) \quad \begin{cases} u_1(x) = -p_1(x) u_1(x+1) - p_2(x) u_2(x+1) - \dots - p_n(x) u_n(x+1), \\ u_2(x) = u_1(x+1) \\ u_3(x) = u_2(x+1) \\ \dots \\ u_n(x) = u_{n-1}(x+1), \end{cases}$$

que $u_1(x)$ est solution de l'équation

$$(22) \quad u(x) + p_1(x) u(x+1) + p_2(x) u(x+2) + \dots + p_n(x) u(x+n) = 0.$$

En particulier, le système adjoint de (21) étant

$$\begin{aligned} \omega_1(x+1) &= -p_1(x) \omega_1(x) + \omega_2(x), \\ \omega_2(x+1) &= -p_2(x) \omega_1(x) + \omega_3(x), \\ &\dots \\ \omega_n(x+1) &= -p_n(x) \omega_1(x), \end{aligned}$$

on en déduit que $w_1(x)$ vérifie l'équation

$$w(x) + p_1(x-1)w(x-1) + p_2(x-2)w(x-2) + \dots + p_n(x-n)w(x-n) = 0$$

qui est justement l'adjointe de (22).

62. Nous dirons que n fonctions $w_1(x)$, $w_2(x)$, ..., $w_n(x)$ forment un système de multiplicateurs de (1) si l'on a

$$(23) \quad \sum_{i=1}^n w_i(x) \left\{ u_i(x+1) - \sum_{j=1}^n p_i^{(j)}(x) u_j(x) \right\} \equiv \Delta Q(u(x)),$$

$Q(u(x))$ étant une forme linéaire de $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$. En posant

$$Q(u(x)) \equiv \sum_{i=1}^n q_i(x) u_i(x),$$

l'identification des deux membres de (23) donne

$$\begin{aligned} w_i(x) &= q_i(x+1), \\ \sum_{j=1}^n p_i^{(j)}(x) w_j(x) &= q_i(x), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que les $w_i(x-1)$ doivent être solutions du système

$$u_i(x) = \sum_{j=1}^n p_j^{(i)}(x) u_j(x+1),$$

c'est-à-dire du système adjoint (17).

Posons

$$P_i(u(x)) \equiv u_i(x+1) - \sum_{j=1}^n p_i^{(j)}(x) u_j(x),$$

$$\bar{P}_i(u(x)) \equiv u_i(x-1) - \sum_{j=1}^n p_j^{(i)}(x) u_j(x),$$

et considérons la différence

$$(24) \quad \sum_{i=1}^n w_i(x) P_i(u(x)) - \Delta \sum_{i=1}^n u_i(x) w_i(x-1).$$

Devant s'annuler pour toute solution $w_1(x)$, $w_2(x)$, ..., $w_n(x)$ du

système $\bar{P}_i(w(x)) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), elle doit être une combinaison linéaire des premiers membres de ce système. Le coefficient de $w_i(x-1)$ dans (24) étant $u_i(x)$, on est ainsi conduit à l'identité ⁽¹⁾

$$(25) \quad \sum_{i=1}^n w_i(x) P_i(u(x)) - \sum_{i=1}^n u_i(x) \bar{P}_i(w(x)) \equiv \Delta \sum_{i=1}^n u_i(x) w_i(x-1).$$

Les propriétés des systèmes adjoints peuvent également être déduites de cette identité.

III. — SYSTÈMES A SECOND MEMBRE.

63. Dans un système d'équations linéaires non homogènes

$$(26) \quad P_i(u(x)) \equiv u_i(x+1) - \sum_{j=1}^n p_i^{(j)}(x) u_j(x) = p_i(x),$$

on dira que les $p_i(x)$ constituent le *second membre*, le système d'équations $P_i(u(x)) = 0$ étant dit sans second membre. Si $\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x), \dots, \bar{u}_n(x)$ est une solution particulière de (26), et si $u_i^{(h)}(x), u_2^{(h)}(x), \dots, u_n^{(h)}(x)$ ($h = 1, 2, \dots, n$) désigne un système fondamental de solutions de $P_i(u(x)) = 0$, la solution générale de (26) est

$$u_i(x) = \bar{u}_i(x) + \sum_{h=1}^n \pi_h(x) u_i^{(h)}(x).$$

La connaissance du système fondamental $u_i^{(h)}(x)$ permet de ramener la résolution de (26) à celle de n équations aux différences du premier ordre. Il suffit de poser

$$u_i(x) = \sum_{h=1}^n f_h(x) u_i^{(h)}(x),$$

les $f_h(x)$ étant les nouvelles inconnues. En portant ces expressions

⁽¹⁾ Cette relation est bien symétrique, car le second membre fait apparaître, pour $u_i(x)$ et $w_i(x)$, les écarts $+1$ et -1 mis en évidence dans $P_i(u(x))$ et $\bar{P}(w(x))$.

dans (26), on trouve pour les $f_h(x)$ le système

$$\sum_{h=1}^n u_i^{(h)}(x+1) \Delta f_h(x) = p_i(x) \quad (i=1, 2, \dots, n);$$

ce système se résout à l'aide des multiplicateurs correspondant aux $u_i^{(h)}(x)$, ce qui fournit les n équations distinctes

$$(27) \quad \Delta f_i(x) = \sum_{k=1}^n \omega_k^{(i)}(x+1) p_k(x).$$

On peut obtenir une solution particulière de (26) à l'aide des $R_i^{(k)}(\nu, x)$, pourvu que les séries formées soient convergentes. En posant

$$(28) \quad u_i(x) = - \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=0}^{\infty} R_i^{(k)}(\nu+1, x) p_k(x+\nu),$$

on a en effet

$$u_i(x+1) = - \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^{\infty} R_i^{(k)}(\nu, x+1) p_k(x+\nu),$$

et, en tenant compte des équations (6),

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n p_i^{(j)}(x) u_j(x) &= - \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=0}^{\infty} p_k(x+\nu) \sum_{j=1}^n p_i^{(j)}(x) R_j^{(k)}(\nu+1, x) \\ &= - \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=0}^{\infty} R_i^{(k)}(\nu, x+1) p_k(x+\nu), \end{aligned}$$

donc

$$P_i(u(x)) = \sum_{k=1}^n R_i^{(k)}(0, x+1) p_k(x) = p_i(x).$$

Il résulte de ce que nous savons de la série (5) que

$$(29) \quad u_i(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^{\infty} R_i^{(k)}(-\nu+1, x) p_k(x-\nu)$$

est également une solution formelle de (26).

IV. — ABAISSEMENT DE L'ORDRE D'UN SYSTÈME.

64. La connaissance d'une solution d'un système homogène (1) d'ordre n permet de ramener la résolution de ce système à celle d'un système homogène d'ordre $n - 1$, suivie d'une sommation. Soit $u_1^{(1)}(x)$; $u_2^{(1)}(x)$, ..., $u_n^{(1)}(x)$ une solution de (1). On peut toujours supposer qu'aucune de ces fonctions n'est identiquement nulle, car, dans le cas contraire, il suffirait d'effectuer sur les inconnues une transformation linéaire à coefficients constants. On peut alors faire le changement d'inconnues

$$(30) \quad \tilde{u}_i(x) = u_i^{(1)}(x) v_i(x).$$

Il vient

$$\begin{aligned} P_i(u(x)) &= v_i(x) P_i(u^{(1)}(x)) + u_i^{(1)}(x+1) \Delta v_i(x) \\ &\quad - \sum_{j=1}^n p_i^{(j)}(x) u_j^{(1)}(x) (v_j(x) - v_i(x)). \end{aligned}$$

En posant

$$q_i^{(j)}(x) = \frac{p_i^{(j)}(x) u_j^{(1)}(x)}{u_i^{(1)}(x+1)} - \varepsilon_{ij},$$

on voit que les $v_i(x)$ doivent être solutions du système

$$(31) \quad \Delta v_i(x) = \sum_{j=1}^n q_i^{(j)}(x) v_j(x),$$

dont les coefficients sont tels que l'on ait

$$(32) \quad \sum_{j=1}^n q_i^{(j)}(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Il résulte de là que, si l'on pose

$$(33) \quad v_i(x) - v_1(x) = w_i(x) \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

et si l'on retranche chaque équation (31) de la première d'entre elles, il vient

$$-w_i(x) = \sum_{j=1}^n (q_i^{(j)}(x) - q_1^{(j)}(x)) v_j(x).$$

ou encore, grâce à (32),

$$(34) \quad \Delta w_i(x) = \sum_{j=2}^n (q_i^{(j)}(x) - q_1^{(j)}(x)) w_j(x) \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

Ayant résolu (34), il resterait à déterminer $v_1(x)$. En retranchant la première équation (31) de l'identité

$$0 = \sum_{j=1}^n q_1^{(j)}(x) v_1(x),$$

on voit que $v_1(x)$ est donné par l'équation aux différences du premier ordre

$$(35) \quad \Delta v_1(x) = \sum_{j=1}^n q_1^{(j)}(x) w_j(x),$$

dont le second membre est connu.

Si l'on connaît m solutions linéairement indépendantes

$$u_1^{(s)}(x), \quad u_2^{(s)}(x), \quad \dots, \quad u_n^{(s)}(x) \quad (s = 1, 2, \dots, m; m > 1)$$

du système (1), on peut répéter l'opération sur le système (34), ce qui conduit à un système analogue d'ordre $n - 2$ et une sommation, et ainsi de suite, de sorte que la résolution de (1) peut être ramenée à celle d'un système d'ordre $n - m$ dont les coefficients satisfont à des équations de la forme (32), et à m sommations.

Il est clair, en effet, que l'on connaît alors m solutions du système (31), savoir

$$\frac{u_1^{(s)}(x)}{u_1^{(1)}(x)}, \quad \frac{u_2^{(s)}(x)}{u_2^{(1)}(x)}, \quad \dots, \quad \frac{u_n^{(s)}(x)}{u_n^{(1)}(x)} \quad (s = 1, 2, \dots, m),$$

et, par suite, $m - 1$ solutions du système (34)

$$\frac{u_2^{(s)}(x)}{u_2^{(1)}(x)} - \frac{u_1^{(s)}(x)}{u_1^{(1)}(x)}, \quad \frac{u_3^{(s)}(x)}{u_3^{(1)}(x)} - \frac{u_1^{(s)}(x)}{u_1^{(1)}(x)}, \quad \dots, \quad \frac{u_n^{(s)}(x)}{u_n^{(1)}(x)} - \frac{u_1^{(s)}(x)}{u_1^{(1)}(x)} \\ (s = 2, 3, \dots, m).$$

Il suffit de vérifier que ces $m - 1$ solutions sont elles-mêmes linéairement indépendantes. Or, s'il existait des relations simultanées à

coefficients périodiques

$$\sum_{s=2}^m \pi_s(x) \left(\frac{u_i^{(s)}(x)}{u_i^{(1)}(x)} - \frac{u_1^{(s)}(x)}{u_1^{(1)}(x)} \right) = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

on aurait, entre les $v_i^s(x)$, des relations simultanées de la forme

$$(36) \quad \sum_{s=2}^m \pi_s(x) v_i^s(x) = \pi(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$\pi(x)$ serait elle-même périodique, car (36) donne

$$\Delta \pi(x) = \sum_{s=2}^m \pi_s(x) \Delta v_i^{(s)}(x),$$

donc, compte tenu des équations (31), puis de (32),

$$\begin{aligned} \Delta \pi(x) &= \sum_{s=2}^m \sum_{j=1}^n \pi_s(x) q_i^{(j)}(x) v_j^{(s)}(x) \\ &= \pi(x) \sum_{j=1}^n q_i^{(j)}(x) = 0. \end{aligned}$$

Mais des relations simultanées telles que (36), s'écrivant

$$\sum_{s=2}^m \pi_s(x) u_i^{(s)}(x) - \pi(x) u_i^{(1)}(x) = 0,$$

sont contraires à l'hypothèse faite sur les $u_i^s(x)$, ce qui démontre la proposition énoncée.



CHAPITRE VI.

MÉTHODE DE BIRKHOFF.

I. — FORMATION D'UNE SOLUTION.

65. Une étude remarquable des systèmes d'équations linéaires aux différences a été faite par G. D. Birkhoff ⁽¹⁾. On verra que ce qui a été exposé au Chapitre IV se rattache étroitement à ses recherches.

Considérons un système (1) (Chap. V), dont les coefficients soient rationnels et holomorphes à l'infini ⁽²⁾, de sorte qu'à l'extérieur d'un certain cercle les $p_i^{(j)}(x)$ admettent des développements convergents

$$(2) \quad p_i^{(j)}(x) = \alpha_i^{(j)} + \frac{\alpha_{i,1}^{(j)}}{x} + \frac{\alpha_{i,2}^{(j)}}{x^2} + \dots$$

Nous supposons en outre que le déterminant des $\alpha_i^{(j)}$ n'est pas nul, ce qui permet de supposer que le déterminant $\Pi(x)$ des coefficients ne s'annule pas hors du cercle considéré.

Les seuls points singuliers d'un pareil système sont donc les points $\alpha_s - \nu$ et $\gamma_s + \nu$, les α_s et $\gamma_s - 1$ étant respectivement les pôles des $\bar{p}_i^{(j)}(x)$ et des $p_i^{(j)}(x)$.

Cherchons une solution formelle de (1) de la forme

$$(3) \quad u_i(x) = a^x x^\rho \left(g_{i,0} + \frac{g_{i,1}}{x} + \frac{g_{i,2}}{x^2} + \dots \right),$$

où a , ρ , $g_{i,0}$, $g_{i,1}$, ... sont des constantes qu'il s'agit de déterminer, les $g_{i,0}$ n'étant pas tous nuls. La substitution, dans notre système,

⁽¹⁾ *Loc. cit.*

⁽²⁾ Ce système sera simplement appelé « système (1) » dans ce Chapitre.

des développements (2) et (3) fournit les équations

$$(4) \quad \sum_{j=1}^n \sum_{s=0}^{\nu} g_{j,s} \left(a_{ij}^{(j)} \rho - \varepsilon_{ij} a \right) \binom{\rho-s}{\nu-s} = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

On simplifie beaucoup la forme de ces équations par une transformation linéaire, à coefficients constants, des inconnues $u_i(x)$. Les $a_{ij}^{(j)}$ subissent alors une certaine transformation linéaire à coefficients constants

$$\sum_{k=1}^n c_i^{(k)} \bar{c}_h^{(j)} a_k^h,$$

où les $\bar{c}_h^{(j)}$ sont les éléments réciproques des $c_i^{(k)}$. Une pareille transformation laisse invariant le déterminant $|a_{ij}^{(j)} - a \varepsilon_{ij}|$, quel que soit a . Si on la choisit de manière que les nouveaux $a_{ij}^{(j)}$ ($i \neq j$) soient nuls, les $a_i^{(i)}$ correspondants sont donc les racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de l'équation caractéristique

$$(5) \quad |a_{ij}^{(j)} - a \varepsilon_{ij}| = 0,$$

qui sont toutes différentes de zéro dans les conditions où nous nous sommes placés.

Après une transformation de cette nature, les équations (4) s'écrivent donc ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$(6) \quad g_{i,0}(a_i - a) = 0,$$

$$(7) \quad g_{i,1}(a_i - a) + \sum_{j=1}^n g_{j,0}(a_{ij}^{(j)} - \varepsilon_{ij} a) = 0,$$

$$(8) \quad g_{i,\nu}(a_i - a) + \sum_{j=1}^n g_{j,\nu-1}(a_{ij}^{(j)} - \varepsilon_{ij} a(\rho - \nu + 1)) + \dots = 0$$

$$(\nu = 2, 3, 4, \dots),$$

les termes non écrits dans l'équation générale (8) étant donnés par la résolution des équations qui la précèdent. Les n équations homogènes (6) exigent que a soit égal à l'un des α_i . Si ceux-ci sont tous distincts, à la valeur α_h de a correspondent, à un facteur constant près, les valeurs

$$g_{i,0} = \varepsilon_{ih}.$$

Les équations (7), où les $g_{i,1}$ sont les inconnues, déterminent ces quantités, à l'exception de $g_{h,1}$ dont le coefficient est nul. Il faut

donc que l'on ait

$$\alpha_{h,1}^{(h)} - \alpha \rho = 0,$$

ce qui détermine ρ . Les équations (8) d'indice $\nu = 2$ définissent les $g_{i,2}$ autres que $g_{h,2}$; l'équation correspondante fournit, par contre, la valeur de $g_{h,1}$. D'une manière générale, les équations (8) d'indice ν déterminent les $g_{i,\nu}$ ($i \neq h$), l'équation relative à $g_{h,\nu}$ définissant $g_{h,\nu-1}$, car le coefficient de $g_{h,\nu-1} y$ est

$$\alpha_{h,1}^{(h)} - \alpha(\rho - \nu + 1) = \alpha(\nu - 1) \neq 0.$$

Aux n racines de l'équation caractéristique correspondent ainsi n solutions formelles de notre système ($h = 1, 2, \dots, n$)

$$(9) \quad G_i^{(h)}(x) = \alpha_h^x x^{\rho_h} \left(g_{i,0}^{(h)} + \frac{g_{i,1}^{(h)}}{x} + \frac{g_{i,2}^{(h)}}{x^2} + \dots \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

avec $g_{i,0}^{(h)} = \varepsilon_{i,h}$. Si l'on fait abstraction de la transformation linéaire que nous avons faite sur les inconnues, nous aurons encore des expressions de la forme (9), où les $g_{i,0}^{(h)}$ sont tels que leur déterminant

$$(10) \quad g = |g_{i,0}^{(h)}| \neq 0.$$

66. Nous avons supposé que tous les α_h étaient distincts; mais nous savons que cette hypothèse n'est pas indispensable à l'existence de n solutions formelles linéairement distinctes, sans termes logarithmiques. Dans ce qui suit, nous supposerons seulement qu'il existe n solutions formelles de la forme (9) satisfaisant à la condition (10). Les α_h seront numérotés de façon que

$$(11) \quad |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots \leq |\alpha_n|,$$

et nous rappelons qu'aucune de ces quantités n'est nulle. On supposera en outre que l'équation linéaire, que le système (1) fournit pour l'inconnue $u_1(x)$, est essentiellement d'ordre n .

Dans ces conditions, considérons les n^2 fonctions

$$(12) \quad g_i^{(h)}(x) = \alpha_h^x x^{\rho_h} \left(g_{i,0}^{(h)} + \frac{g_{i,1}^{(h)}}{x} + \dots + \frac{g_{i,m}^{(h)}}{x^m} \right),$$

où m est un certain entier. Elles constituent un système fondamental de solutions d'un certain système d'équations analogues à (1), de coefficients $q_i^j(x)$ également holomorphes à l'infini. En outre, les équations (4) montrent que le développement de $q_i^j(x)$ en série

des puissances de $\frac{1}{x}$ a les mêmes $m+2$ premiers termes que celui de $p_i^{(j)}(x)$.

Si l'on désigne respectivement par $g(x)$ et $Q(x)$ les matrices des $g_i^{(j)}(x)$ et des $q_i^{(j)}(x)$, on a donc

$$(13) \quad g(x+1) = Q(x)g(x),$$

et la matrice $Q(x)$ est de la forme

$$(14) \quad Q(x) = P(x) \left(1 + \frac{B(x)}{x^{m+2}} \right),$$

où 1 désigne la matrice unité, et $B(x)$ une matrice holomorphe à l'infini.

La méthode de G. D. Birkhoff consiste à considérer, au lieu des produits (13) et (13') du Chapitre V, les matrices

$$(15) \quad T_v(x) = R(v, x)g(x+v) \quad (v \geq 0).$$

Il est clair que, si $g(x)$ était une solution de (1), $T_v(x)$ se réduirait à $g(x)$ et serait une solution. Dans le cas général, il n'en est pas ainsi, mais il résulte du choix de $g(x)$ que les éléments de la première colonne de (15) ont des limites quand $|v|$ augmente indéfiniment, qui forment une solution de (1). Il suffit évidemment de le démontrer pour les valeurs positives de v . Considérons, au lieu de $T_v(x)$, le produit

$$(16) \quad \begin{aligned} \bar{g}(x)T_v(x) &= \bar{g}(x)R(v, x)g(x+v) \\ &= \left\{ \bar{g}(x)\bar{P}(x)g(x+1) \right\} \\ &\quad \times \left\{ \bar{g}(x+1)\bar{P}(x+1)g(x+2) \right\} \dots \\ &\quad \times \left\{ \bar{g}(x+v-1)\bar{P}(x+v-1)g(x+v) \right\}, \end{aligned}$$

où $\bar{g}(x)$ désigne la matrice inverse de $g(x)$. En remplaçant le dernier terme de chaque accolade de (16) par sa valeur déduite de (1), et compte tenu de (14), on voit que chaque accolade est de la forme

$$1 + \frac{\theta(x+s)}{(x+s)^{m+2}},$$

la matrice $\theta(x)$ étant le produit $\bar{g}(x)B(x)g(x)$. Si l'on remarque que les éléments $\bar{g}_i^{(j)}(x)$, réciproques des $g_i^{(j)}(x)$, sont de la forme

$$\bar{g}_i^{(j)}(x) = \alpha_i^x x^{-\rho_i} \left(\bar{g}_{i,0}^{(j)} + \frac{\bar{g}_{i,1}^{(j)}}{x} + \dots \right),$$

on voit que les éléments de $\theta(x)$ sont

$$\theta_i^{(j)}(x) = \left(\frac{a_j}{a_i}\right)^x x^{\rho_j - \rho_i} \Phi_i^{(j)}(x),$$

les fonctions $\Phi_i^{(j)}(x)$ étant analytiques à l'infini, et en tous les points extérieurs à un certain cercle. Pour que ν puisse augmenter indéfiniment, il faut donc que x soit dans un certain domaine Γ

$$(I) \quad \begin{cases} |x| \geq R & (\sigma \geq 0), \\ |\tau| \geq R & (\sigma \leq 0), \end{cases}$$

de la forme considérée au Chapitre IV. (16) s'écrit alors

$$\left(1 + \frac{\theta(x)}{x^{m+2}}\right) \left(1 + \frac{\theta(x+1)}{(x+1)^{m+2}}\right) \dots \left(1 + \frac{\theta(x+\nu-1)}{(x+\nu-1)^{m+2}}\right),$$

ou, en développant,

$$1 + \sum_{k_1=0}^{\nu-1} \frac{\theta(x+k_1)}{(x+k_1)^{m+2}} + \sum_{\substack{k_1, k_2=0 \\ k_1 < k_2}}^{\nu-1} \frac{\theta(x+k_1)\theta(x+k_2)}{(x+k_1)^{m+2}(x+k_2)^{m+2}} + \dots$$

Les éléments qui nous intéressent sont ceux de la première colonne de cette matrice; celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne est

$$(17) \quad \varepsilon_{1,i} + \left(\frac{a_1}{a_i}\right)^x \Xi_i,$$

avec

$$\begin{aligned} \Xi_i = & \sum_{k_1=0}^{\nu-1} \frac{\left(\frac{a_1}{a_i}\right)^{k_1} \Phi_i^{(1)}(x+k_1)}{(x+k_1)^{m+2+\rho_i-\rho_1}} \\ & + \sum_{\substack{k_1, k_2=0 \\ k_1 < k_2}}^{\nu-1} \sum_{h=1}^n \frac{\left(\frac{a_h}{a_i}\right)^{k_1} \left(\frac{a_1}{a_h}\right)^{k_2} \Phi_i^{(h)}(x+k_1) \Phi_h^{(1)}(x+k_2)}{(x+k_1)^{m+2+\rho_i-\rho_h} (x+k_2)^{m+2+\rho_h-\rho_1}} + \dots \end{aligned}$$

Si M est le maximum des $|\Phi_i^{(j)}(x)|$ dans Γ , le terme général de rang s ($s = 1, 2, \dots, \nu-1$) de Ξ_i est inférieur, en valeur absolue, à

$$M^s \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_s=0 \\ k_1 < k_2 < \dots < k_s}}^{\nu-1} \sum_{h_1, h_2, \dots, h_{s-1}=1}^n \frac{\left|\frac{a_{h_1}}{a_i}\right|^{k_1} \left|\frac{a_{h_2}}{a_{h_1}}\right|^{k_2} \dots \left|\frac{a_1}{a_{h_{s-1}}}\right|^{k_s}}{(x+k_1)^{m+2+\rho_i-\rho_{h_1}} (x+k_2)^{m+2+\rho_{h_1}-\rho_{h_2}} \dots (x+k_s)^{m+2+\rho_{h_{s-1}}-\rho_i}}.$$

Remarquons que le numérateur de cette dernière fraction s'écrit

$$\left| \frac{a_1}{a_l} \right|^{h_1} \left| \frac{a_1}{a_{h_1}} \right|^{h_2 - h_1} \dots \left| \frac{a_1}{a_{h_{s-1}}} \right|^{h_s - h_{s-1}},$$

quantité qui est au plus égale à 1, en vertu de (11) et grâce au signe des exposants. On a donc

$$(18) \quad |\Xi_l| < \sum_{k_1=0}^{v-1} \frac{M'}{|x+k_1|^{m+2+\rho'_l-\rho'_1}} + \sum_{h_1=1}^n \sum_{k_1=0}^{v-1} \frac{M'^2}{|x+k_1|^{m+2+\rho'_l-\rho'_{h_1}}} \sum_{h_2=h_1+1}^{v-1} \frac{1}{|x+k_2|^{m+2+\rho'_{h_1}-\rho'_{h_2}}} + \dots,$$

où l'on a posé $\rho'_h = \mathcal{R}(\rho_h)$, et où $\frac{M'}{M}$ est inférieur ou égal à la plus grande des quantités $e^{\frac{\pi}{2}|\rho_k - \rho_h|}$.

Chacune des sommes qui entrent au second membre de (18) converge lorsque v augmente indéfiniment, pourvu que m soit assez grand; le nombre des termes de ce second membre augmente aussi indéfiniment, et il s'agit de démontrer la convergence de la série obtenue. Cette convergence apparaît tout de suite en remplaçant tous les exposants $m+2+\rho'_l-\rho'_h$ par le plus petit d'entre eux ⁽¹⁾, qu'on peut supposer au moins égal à 2. On peut obtenir des inégalités un peu plus précises en opérant de la façon suivante. Le terme général au second

membre de (18) devient, au facteur M'^s et au symbole $\sum_{h_1, h_2, \dots, h_{s-1}=1}^n$ près,

$$(19) \quad \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{|x+k_1|^{m+2+\rho'_l-\rho'_{h_1}}} \times \dots \\ \times \sum_{k_{s-1}=1}^{\infty} \frac{1}{|x+k_1+\dots+k_{s-2}+k_{s-1}|^{m+2+\rho'_{h_{s-2}}-\rho'_{h_{s-1}}}} \\ \times \sum_{k_s=1}^{\infty} \frac{1}{|x+k_1+\dots+k_{s-1}+k_s|^{m+2+\rho'_{h_{s-1}}-\rho'_1}}.$$

On peut appliquer successivement les inégalités de Birkhoff (24) (§ 48)

(1) C'est la méthode de G. D. Birkhoff.

aux différentes sommes de (19), en commençant par la droite. Si $\sigma \geq 0$, la dernière de ces sommes est inférieure à

$$\frac{\pi}{|x + k_1 + \dots + k_{s-2} + k_{s-1}|^{m+1+\rho'_{h_{s-1}}-\rho'_1}},$$

donc la somme relative à k_{s-1} est inférieure à

$$\sum_{k_{s-1}=1}^{\infty} \frac{\pi}{|x + k_1 + \dots + k_{s-2} + k_{s-1}|^{2m+3+\rho'_{h_{s-2}}-\rho'_1}},$$

et l'on peut appliquer également à cette dernière somme la première inégalité de Birkhoff. On voit aisément qu'on aboutira ainsi, de proche en proche, à la borne supérieure suivante

$$\frac{(M'n\pi)^s}{|x|^{s(m+1)+\rho'_1-\rho'_1}},$$

pour le terme général du second membre de (18). La convergence de la série de ces termes ($s=1, 2, 3, \dots$) en découle immédiatement, pourvu que x soit dans Γ , avec $\sigma \geq 0$. On a obtenu, en outre, pour limite supérieure de la somme de cette série, dans ce domaine, la quantité

$$(20) \quad \frac{1}{|x|^{\rho'_1-\rho'_1}} \frac{M_1}{|x|^{m+1}-M_1},$$

où $M_1 = M'n\pi$. Lorsque $\sigma \leq 0$, avec $|\tau| \geq 1$, on utilise de la même manière la dernière inégalité de Birkhoff; on obtient de suite, pour limite supérieure du terme général de la série considérée,

$$\frac{(2M'n\pi)^s}{|\tau|^{s(m+1)+\rho'_1-\rho'_1}}.$$

Cette série converge donc encore dans cette partie de Γ , sa borne supérieure étant

$$(21) \quad \frac{1}{|\tau|^{\rho'_1-\rho'_1}} \frac{2M_1}{|\tau|^{m+1}-2M_1}.$$

Nous avons donc démontré que Ξ_b et par suite (17), converge absolument et uniformément vers une limite dans toute région bornée de Γ . La limite $\nu_i(x)$ de (17) est donc une fonction de x analytique dans Γ ; en outre, il résulte de (20) et (21) qu'elle satisfait,

dans ce domaine, à des relations asymptotiques de la forme

$$(22) \quad |\varphi_i(x) - \varepsilon_{1i}| < \begin{cases} \left| \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \right)^x \right| \frac{C}{|x|^{m+1+\rho'_i-\rho_i}} & (\tau \geq 0), \\ \left| \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \right)^x \right| \frac{C}{|\tau|^{m+1+\rho'_i-\rho_i}} & (|\tau| \geq 1). \end{cases}$$

Si l'on considère maintenant les éléments de la première colonne de $T_v(x)$, ils tendent vers les fonctions

$$u_i(x) = \sum_{h=1}^n g_i^{(h)}(x) \varphi_h(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

analytiques dans Γ . Des expressions des $g_i^{(h)}(x)$ et des inégalités (22), on déduit immédiatement, pour les $u_i(x)$, les relations asymptotiques suivantes, valables dans Γ ,

$$(23) \quad |u_i(x) - g_i^{(1)}(x)| < \begin{cases} |g_i^{(1)}(x)| \frac{C}{|x|^{m+1}} & (\tau \geq 0), \\ |g_i^{(1)}(x)| \frac{C}{|\tau|^{m+1}} \sum_{h=1}^n \left| \frac{x}{\tau} \right|^{\rho'_h - \rho_i} & (|\tau| \geq 1). \end{cases}$$

Les fonctions $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ constituent une solution de notre système (1), car il résulte de

$$T_{v-1}(x+1) = P(x) T_v(x)$$

que les éléments $t_{\nu,i}^{(j)}$ de $T_v(x)$ satisfont aux relations

$$(24) \quad t_{\nu-1,i}^{(j)}(x+1) = \sum_{k=1}^n p_i^{(k)}(x) t_{\nu,k}^{(j)}(x).$$

On en conclut que les $u_i(x)$ sont holomorphes dans tout le plan, en dehors des points $\alpha_s - \nu$, que ces solutions admettent pour pôles.

Enfin, ces fonctions ne dépendent pas du choix de m , car si les $g_i^{(h)}(x)$ désignent les fonctions relatives à $m' \neq m$, on peut écrire

$$T_v(x) = T'_v(x) \overline{g'}(x+\nu) g'(x+\nu),$$

et le produit des deux dernières matrices tend vers la matrice unité. On pourrait également utiliser, comme nous l'avons fait au Chapitre IV, les relations asymptotiques (23).

67. Ce résultat va nous permettre de démontrer que, d'une manière générale, les déterminants formés avec les éléments des r premières colonnes des $T_v(x)$ ($r = 2, 3, \dots, n$) tendent vers des limites quand v augmente indéfiniment. Nous ferons la démonstration pour $r = 2$, ce qui simplifie l'écriture, sans diminuer en rien la généralité du raisonnement.

Les $\frac{n(n-1)}{2}$ déterminants en question sont les éléments de la première colonne d'une matrice construite, comme $T_v(x)$, à partir du système d'ordre $\frac{n(n-1)}{2}$

$$(25) \quad u(x+1) = P_2(x) u(x),$$

dont les coefficients $p_{i,j}^{(k,h)}(x)$ sont

$$p_{i,j}^{(k,h)}(x) = \begin{vmatrix} p_i^{(k)}(x) & p_i^{(h)}(x) \\ p_j^{(k)}(x) & p_j^{(h)}(x) \end{vmatrix};$$

en effet, il résulte de (24) et de

$$t_{v-1,j}^{(2)}(x+1) = \sum_{h=1}^n p_j^{(h)}(x) t_{v,h}^{(2)}(x)$$

que

$$\begin{vmatrix} t_{v-1,i}^{(1)}(x+1) & t_{v-1,i}^{(2)}(x+1) \\ t_{v-1,j}^{(1)}(x+1) & t_{v-1,j}^{(2)}(x+1) \end{vmatrix} = \sum_{k,h=1}^n p_{i,j}^{(k,h)}(x) \begin{vmatrix} t_{v,k}^{(1)}(x) & t_{v,k}^{(2)}(x) \\ t_{v,h}^{(1)}(x) & t_{v,h}^{(2)}(x) \end{vmatrix},$$

avec $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \dots, n$. Les éléments de la matrice $P_2(x)$ sont holomorphes dans le même domaine que les $p_i^{(j)}(x)$; en outre, le système (25) est vérifié formellement par les quantités

$$\begin{vmatrix} G_i^{(k)}(x) & G_i^{(h)}(x) \\ G_j^{(k)}(x) & G_j^{(h)}(x) \end{vmatrix},$$

de sorte que les mineurs

$$(26) \quad g_{i,j}^{(k,h)}(x) = \begin{vmatrix} g_i^{(k)}(x) & g_i^{(h)}(x) \\ g_j^{(k)}(x) & g_j^{(h)}(x) \end{vmatrix} \quad (i < j; i, j = 1, 2, \dots, n)$$

de $g(x)$ jouent, pour ce système, le rôle des $g_i^{(h)}(x)$ pour le système

initial (1). Le déterminant des termes constants de ces quantités a pour valeur g^{n-1} , comme il résulte de la théorie classique des déterminants. La condition (10) est donc satisfaite.

Pour pouvoir appliquer les conclusions du paragraphe précédent, il suffit de vérifier que la première colonne considérée ($k=1$, $h=2$) correspond bien à la racine, de valeur absolue minimum, de l'équation caractéristique de (25); et ceci est évident, car les $\frac{n(n-1)}{2}$ racines de cette équation sont les produits $a_k a_h$ ($k < h$).

Les limites $u_{i,j}(x)$ de nos $\frac{n(n-1)}{2}$ déterminants sont analytiques aux mêmes points que les $u_i(x)$. En ce qui concerne leurs expressions asymptotiques, on a ici

$$g_{i,j}^{(k,h)}(x) = (a_k a_h)^x x^{\rho_k + \rho_h} O(1),$$

donc l'application des formules (23) donne les inégalités

$$(27) \quad |u_{i,j}(x) - g_{i,j}^{(1,2)}(x)| < \begin{cases} |g_{i,j}^{(1,2)}(x)| \frac{C}{|x|^{\frac{1}{m+1}}} & (\sigma \geq 0), \\ |g_{i,j}^{(1,2)}(x)| \frac{C}{|\tau|^{\frac{1}{m+1}}} \left| \frac{x}{\tau} \right|^{d_2} & (|\tau| > 1), \end{cases}$$

valables dans Γ_1 et où d_2 désigne la plus grande des quantités

$$\rho'_i + \rho'_j - \rho'_1 - \rho'_2 \quad (i=1; i, j=2, 3, \dots, n).$$

Nous pouvons donc énoncer le

THÉOREME. — *Étant donné un système de n équations linéaires aux différences, admettant n solutions formelles de la forme (9) satisfaisant à la condition (10), et tel que les racines a_1, a_2, \dots, a_n de son équation caractéristique soient toutes différentes de zéro, si l'on ordonne ces racines dans l'ordre des valeurs absolues non décroissantes, les déterminants d'ordre r , formés avec les éléments des r premières colonnes ($r=1, 2, \dots, n$) de la matrice $T_v(x)$, tendent vers des limites $u_{i,j,\dots,l}(x)$ quand v augmente indéfiniment.*

(1) Les déterminants (26) contiennent des termes de degré en x inférieurs à $-m$, mais ceci importe peu, car il aurait suffi, pour le raisonnement du paragraphe précédent, que les $g_i^{(h)}(x)$ eussent été des développements convergents coïncidant, jusqu'au $(m+1)^{\text{ième}}$ terme, avec le développement formel (9).

Ces fonctions $u_{i,j,\dots,l}(x)$ sont analytiques dans tout le plan, sauf aux points $\alpha, -\nu$, qu'elles admettent pour pôles, et vérifient, dans Γ , les relations asymptotiques

$$(28) \quad |u_{i,j,\dots,l}(x) - g_{i,j,\dots,l}^{(1,2,\dots,r)}(x)| < \begin{cases} |g_{i,j,\dots,l}^{(1,2,\dots,r)}(x)| \frac{C}{|x|^{m+1}} & (\sigma \geq 0), \\ |g_{i,j,\dots,l}^{(1,2,\dots,r)}(x)| \frac{C}{\tau^{m+1}} \left| \frac{x}{\tau} \right|^{d_r} & (\tau \geq 1), \end{cases}$$

d_r étant la plus grande des quantités

$$\varphi'_i - \varphi'_j - \dots - \varphi'_l - \varphi'_1 - \varphi'_2 - \dots - \varphi'_r \\ (i = 1; i, j = 2; \dots; i, j, \dots, l = r, r+1, \dots, n).$$

Parmi ces déterminants limites, $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ constituent une solution du système en question.

En faisant décroître ν indéfiniment, on obtient de même des déterminants limites $\bar{u}_{i,j,\dots,l}(x)$, holomorphes en tous les points du plan autres que les $\gamma_{s+1} + \nu$, et satisfaisant, dans un domaine $\bar{\Gamma}$,

$$(\bar{\Gamma}) \quad \begin{cases} |x| \geq R & (\sigma \leq 0), \\ |\tau| \geq R & (\sigma \geq 0), \end{cases}$$

à des relations asymptotiques identiques à (28), au signe de σ près.

II. — LES SOLUTIONS ACCESSOIRES.

68. On se propose maintenant de déduire, des déterminants limites, un système fondamental de solutions de (1). Nous connaissons déjà la solution

$$u_i^{(1)}(x) = u_i(x).$$

On en connaît même autant qu'il y a de racines α_i dont la valeur absolue est égale au minimum $|a_1|$, car le raisonnement que nous avons fait sur la première colonne de $T_\nu(x)$ s'applique aux colonnes de même rang que ces racines. La question ne se pose donc, par exemple, de trouver une solution associée aux $u_{i,k}(x)$, que si $|a_2| > |a_1|$.

Nous utiliserons la remarque suivante. Étant donné $r-1$ colonnes de n éléments $b_i^{(s)}, b_2^{(s)}, \dots, b_n^{(s)}$ ($s=1, 2, \dots, r-1$), dont un déterminant de degré $r-1$ n'est pas nul, la condition nécessaire et

suffisante pour que les $\binom{n}{r}$ équations en y_1, y_2, \dots, y_n

$$(29) \quad B_{i_1, i_2, \dots, i_r}(y) \equiv \begin{vmatrix} b_{i_1}^{(1)} & b_{i_1}^{(2)} & \dots & b_{i_1}^{(r-1)} & y_{i_1} \\ b_{i_2}^{(1)} & b_{i_2}^{(2)} & \dots & b_{i_2}^{(r-1)} & y_{i_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i_r}^{(1)} & b_{i_r}^{(2)} & \dots & b_{i_r}^{(r-1)} & y_{i_r} \end{vmatrix} = A_{i_1, i_2, \dots, i_r},$$

où les A_{i_1, i_2, \dots, i_r} sont donnés, soient compatibles, est que les A_{i_1, i_2, \dots, i_r} changent de signe quand on permute deux indices, et vérifient les relations

$$(30) \quad A_{i_1, i_2, \dots, i_r} b_{i_{r+1}}^{(s)} + A_{i_2, \dots, i_r, i_{r+1}} b_{i_1}^{(s)} + \dots + A_{i_1, \dots, i_r, i_{r-1}} b_{i_r}^{(s)} = 0.$$

Dans ces conditions, les inconnues y_1, y_2, \dots, y_n sont définies à des formes linéaires

$$\sum_{s=1}^{r-1} C_s b_i^{(s)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

près, dépendant des $r-1$ constantes arbitraires C_s .

En supposant que le déterminant des $r-1$ premières lignes ne soit pas nul, on voit en effet que les équations dont les seconds membres sont $A_{1, 2, \dots, r-1, i} (i = r, r+1, \dots, n)$ définissent les y_i en fonction de y_1, y_2, \dots, y_{r-1} . Considérons alors les relations (30), qui sont évidemment nécessaires puisqu'elles résultent des identités

$$(31) \quad \begin{vmatrix} b_{i_1}^{(1)} & \dots & b_{i_1}^{(r-1)} & y_{i_1} & b_{i_1}^{(s)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i_r}^{(1)} & \dots & b_{i_r}^{(r-1)} & y_{i_r} & b_{i_r}^{(s)} \\ b_{i_{r+1}}^{(1)} & \dots & b_{i_{r+1}}^{(r-1)} & y_{i_{r+1}} & b_{i_{r+1}}^{(s)} \end{vmatrix} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, r-1).$$

Si elles sont satisfaites, toutes les équations (29) sont vérifiées par les fonctions que nous venons de définir : Tout d'abord, les identités (31) d'indices $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_{r-1} = r-1, i_r = i, i_{r+1} = k$, où les y_s sont remplacés par les fonctions trouvées, et dont le premier membre est développé suivant les éléments de la dernière colonne, donnent $r-1$ équations linéaires de déterminant non nul, par rapport aux $r-1$ quantités

$$B_{i_1, i_2, \dots, i_{r-2}, i, k} \quad (i_1, i_2, \dots, i_{r-2} = 1, 2, \dots, r-1);$$

d'autre part, $r - 1$ des relations (30) ne sont autres que ces équations où la lettre B est remplacée par A, c'est-à-dire que les équations (29) dont $r - 2$ indices sont inférieurs à r sont vérifiées. On vérifiera ensuite, de la même manière, les équations dont $r - 3$ indices sont inférieurs à r , et ainsi de suite. Nous avons bien $r - 1$ arbitraires, qui sont les valeurs de y_1, y_2, \dots, y_{r-1} .

69. Si l'on prend pour les $b_i^{(1)}$ les valeurs des $u_i^{(1)}(x)$ en un point x_0 où ces fonctions ne sont pas simultanément nulles, ce qui est évidemment possible, on peut trouver n valeurs $u_i^{(2)}(x_0)$ telles que l'on ait

$$(32) \quad \begin{vmatrix} u_i^{(1)}(x) & u_i^{(2)}(x) \\ u_j^{(1)}(x) & u_j^{(2)}(x) \end{vmatrix} = u_{i,j}(x)$$

au point $x = x_0$, car, les $u_{i,j}(x)$ étant des limites de déterminants de la forme du premier membre, les conditions (30) correspondantes sont bien vérifiées. D'autre part, si l'on définit les $u_i^{(2)}(x)$, aux points $x_0 \pm \nu$, par la condition qu'ils satisfassent au système (1), nous savons que les déterminants au premier membre de (32) satisferont au système (25); les $u_{i,j}(x)$ étant eux-mêmes des solutions de ce système, les deux membres de (32) seront alors égaux en tous les points $x_0 \pm \nu$. On pourra ainsi définir les $u_i^{(2)}(x)$ en tous les points non singuliers du système (1), et cela à des quantités $\pi_1(x) u_i^{(1)}(x)$ près, $\pi_1(x)$ étant une fonction périodique quelconque.

Les propriétés asymptotiques des $u_{i,j}(x)$ montrent que les déterminants des deux colonnes formées avec les $u_i^{(1)}(x)$ et les $u_i^{(2)}(x)$ ne sont pas identiquement nuls. On pourra donc trouver de même une solution $u_1^{(3)}(x), u_2^{(3)}(x), \dots, u_n^{(3)}(x)$ de (1), en résolvant les équations

$$\begin{vmatrix} u_i^{(1)}(x) & u_i^{(2)}(x) & u_i^{(3)}(x) \\ u_j^{(1)}(x) & u_j^{(2)}(x) & u_j^{(3)}(x) \\ u_k^{(1)}(x) & u_k^{(2)}(x) & u_k^{(3)}(x) \end{vmatrix} = u_{i,j,k}(x);$$

et ces n fonctions $u_i^{(3)}(x)$ seront définies aux expressions

$$\pi_1(x) u_i^{(1)}(x) + \pi_2(x) u_i^{(2)}(x)$$

près. Et ainsi de suite, jusqu'à une $n^{\text{ième}}$ solution, dont les éléments $u_i^{(n)}(x)$ dépendront de $n - 1$ fonctions périodiques arbitraires.

70. On peut choisir ces facteurs périodiques de manière que les

solutions ainsi formées satisfassent à des relations asymptotiques analogues à celles que nous avons établies pour les $u_i^{(1)}(x)$. Par contre, ces solutions ne seront définies qu'à l'extérieur de la bande $|\tau| \leq R$.

Nous ferons le calcul pour la deuxième solution $u_1^{(2)}(x), u_2^{(2)}(x), \dots, u_n^{(2)}(x)$ associée aux $u_{i,j}(x)$, en supposant toujours $|a_2| > |a_1|$.

Remarquons tout d'abord qu'il suffit de déterminer la première fonction $u_1^{(2)}(x)$ d'une solution $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$, car les équations

$$(33) \quad u_1(x+s) = \sum_{k=1}^n R_1^{(k)}(-s; x+s) u_k(x) \quad (s=2, 3, \dots, n)$$

ont un déterminant non nul par rapport aux $u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x)$, sans quoi le système (1) fournirait pour $u_1(x)$ une équation d'ordre inférieur à n , contrairement à ce que nous avons supposé.

Posons alors

$$(34) \quad \begin{vmatrix} u_1^{(1)}(x) & u_1^{(2)}(x) \\ u_1^{(1)}(x+1) & u_1^{(2)}(x+1) \end{vmatrix} = D^{(2)}(x).$$

En remplaçant les $u_1^{(s)}(x+1)$ ($s=1, 2$) en fonction des $u_1^{(s)}(x)$, à l'aide du système (1) lui-même dont les $u_i^{(s)}(x)$ sont deux solutions, on a

$$D^{(2)}(x) = \sum_{i=1}^n p_1^{(i)}(x) u_{1,i}(x),$$

donc la valeur de ce déterminant est connue. (34) peut donc être considéré comme une équation aux différences, du premier ordre, non homogène, dont l'inconnue est $u_1^{(2)}(x)$. L'équation sans second membre admet la solution connue $u_1^{(1)}(x)$; on sait donc qu'en posant

$$(35) \quad u_1^{(2)}(x) = u_1^{(1)}(x) \varphi(x),$$

la résolution de (34) se ramène à celle de l'équation

$$(36) \quad \Delta \varphi(x) = \frac{D^{(2)}(x)}{u_1^{(1)}(x) u_1^{(1)}(x+1)}.$$

Cette équation admet la solution formelle

$$(37) \quad \varphi_1(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{D^{(2)}(x-v)}{u_1^{(1)}(x-v) u_1^{(1)}(x+1-v)},$$

dont nous allons montrer la convergence, pour $|\tau| \geq R$.

Or, si l'on remplace $u_4^{(1)}(x)$ et $u_4^{(2)}(x)$ par $g_4^{(1)}(x)$ et $g_4^{(2)}(x)$, on est conduit à former de même le déterminant

$$(38) \quad E^{(2)}(x) = \begin{vmatrix} g_4^{(1)}(x) & g_4^{(2)}(x) \\ g_4^{(1)}(x+1) & g_4^{(2)}(x+1) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n q_4^{(i)}(x) g_{4,i}^{(1,2)}(x),$$

et le développement

$$(39) \quad L_1(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{E^{(2)}(x-v)}{g_4^{(1)}(x-v) g_4^{(1)}(x+1-v)}.$$

Mais il résulte de la définition de $E^{(2)}(x)$ que

$$L_1(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ \frac{g_4^{(2)}(x+1-v)}{g_4^{(1)}(x+1-v)} - \frac{g_4^{(2)}(x-v)}{g_4^{(1)}(x-v)} \right\};$$

cette série est convergente, car l'hypothèse $|a_2| > |a_1|$ entraîne

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{g_4^{(2)}(x-v)}{g_4^{(1)}(x-v)} = 0,$$

et sa somme est $\frac{g_4^{(2)}(x)}{g_4^{(1)}(x)}$.

Il suffit donc de démontrer la convergence de la série

$$(40) \quad v_1(x) = \frac{g_4^{(2)}(x)}{g_4^{(1)}(x)} = \sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ \frac{p_1^{(i)}(x-v) u_{1,i}(x-v)}{u_1^{(1)}(x-v) u_1^{(1)}(x+1-v)} - \frac{q_1^{(i)}(x-v) g_{1,i}^{(1,2)}(x-v)}{g_1^{(1)}(x-v) g_1^{(1)}(x+1-v)} \right\}.$$

En remplaçant les facteurs de la première fraction de l'accolade par leurs expressions asymptotiques en fonction des facteurs correspondants de la deuxième fraction, cette accolade peut s'écrire

$$\frac{q_1^{(i)}(x-v) g_{1,i}^{(1,2)}(x-v)}{g_1^{(1)}(x-v) g_1^{(1)}(x+1-v)} \times \left\{ \frac{\left[1 + \frac{M_1(x-v)}{(x-v)^{m+2}} \right] \left[1 + \frac{M_2(x-v)}{\tau^{m+1}} \left(\frac{x-v}{\tau} \right)^{d_1} \right]}{\left[1 + \frac{M(x-v)}{\tau^{m+1}} \left(\frac{x-v}{\tau} \right)^{d_1} \right] \left[1 + \frac{M(x+1-v)}{\tau^{m+1}} \left(\frac{x-v}{\tau} \right)^{d_1} \right]} - 1 \right\},$$

où $M(x)$, $M_1(x)$, $M_2(x)$ sont des fonctions bornées dans le domaine

considéré. On voit que cette dernière accolade est de la forme

$$\frac{M_3(x-v)}{\tau^{m+1}} \left(\frac{x-v}{\tau} \right)^d,$$

d étant un certain nombre non négatif, et $M_3(x-v)$ étant une fonction bornée. Enfin, si l'on remarque que l'on a

$$\begin{aligned} q_1^{(i)}(x-v) &= q_1^{(i)}(x) O(1), \\ g_1^{(1)}(x-v) &= a_1^{-v} \left(\frac{x-v}{x} \right)^{\rho_1} g_1^{(1)}(x) O(1), \\ g_{1,i}^{(1,2)}(x-v) &= (a_1 a_2)^{-v} \left(\frac{x-v}{x} \right)^{\rho_1 + \rho_2} g_{1,i}^{(1,2)}(x) O(1), \end{aligned}$$

on voit que la $i^{\text{ème}}$ série de (40) s'écrit

$$O(1) \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^x \frac{x^{\rho_2 - \rho_1}}{\tau^{m+1}} \left(\frac{x}{\tau} \right)^d \sum_{v=1}^{\infty} M_3(x-v) \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^v \left(\frac{x-v}{x} \right)^d.$$

Cette dernière somme est finie, donc (40) entraîne

$$\left| v_1(x) - \frac{g_1^{(2)}(x)}{g_1^{(1)}(x)} \right| < C \left| \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^x \frac{x^{\rho_2 - \rho_1}}{\tau^{m+1}} \right| \left| \frac{x}{\tau} \right|^d,$$

ou encore, en multipliant par $\frac{g_1^{(1)}(x)}{g_1^{(2)}(x)}$ les deux membres de cette inégalité,

$$\left| v_1(x) \frac{g_1^{(1)}(x)}{g_1^{(2)}(x)} - 1 \right| < \frac{C}{|\tau|^{m+1}} \left| \frac{x}{\tau} \right|^d.$$

Enfin, si l'on multiplie entre eux $v_1(x) \frac{g_1^{(1)}(x)}{g_1^{(2)}(x)}$ et $\frac{u_1^{(1)}(x)}{g_1^{(1)}(x)}$, tirés de cette dernière inégalité et de (23), il vient

$$\left| \frac{u_1^{(2)}(x)}{g_1^{(2)}(x)} - 1 \right| < \frac{C}{|\tau|^{m+1}} \left| \frac{x}{\tau} \right|^d,$$

pourvu que $|\tau|$ soit supérieur ou égal à R .

Si l'on suppose en outre $\sigma \geq 0$, on peut séparer les termes de (40)

en deux groupes $\sum_{v=1}^k$ et $\sum_{v=k+1}^{\infty}$, comme on a fait au paragraphe 50,

k désignant la partie entière de $\frac{\sigma}{2}$, et appliquer les premières inégalités (28) aux termes du premier groupe. Le raisonnement du

paragraphe cité s'applique sans modification, et fournit l'inégalité plus précise

$$\left| \frac{u_i^{(2)}(x)}{g_i^{(2)}(x)} - 1 \right| < \frac{C}{|\tau|^{m+1}} \quad (|\tau| \geq R, \sigma \geq 0).$$

Les fonctions $u_i^{(2)}(x)$ ($i = 2, 3, \dots, n$) déterminées par les équations (33) sont analytiques dans le même domaine que $u_1^{(2)}(x)$. En comparant ces équations aux équations analogues relatives aux $g_i^{(2)}(x)$, dont les coefficients diffèrent des $R_1^{(k)}(-s, x+s)$ de quantités qui sont de l'ordre de $\frac{1}{|x+s|^{m+2}}$ au plus, ou en remarquant que le raisonnement fait sur $u_1^{(2)}(x)$ leur est applicable, on voit que l'on aura

$$(41) \quad \left| \frac{u_i^{(2)}(x)}{g_i^{(2)}(x)} - 1 \right| < \begin{cases} \frac{C}{|x|^{m+1}} & (|\tau| \geq R, \sigma \geq 0), \\ \frac{C}{|\tau|^{m+1}} \left| \frac{x}{\tau} \right|^d & (|\tau| \geq R), \end{cases}$$

d étant un certain nombre ≥ 0 .

71. Ce que nous venons de faire pour le système (1) s'applique au système (25), dont nous connaissons déjà une solution

$$u_{i,j}^{(1)}(x) = u_{i,j}(x).$$

Si $|a_2| = |a_3|$, on sait en déterminer une autre en permutant simplement les rôles des colonnes de rangs 2 et 3 dans $T_v(x)$. Si $|a_1 a_2| < |a_1 a_3|$, la méthode du paragraphe précédent permet de former une deuxième solution $u_{i,j}^{(2)}(x)$, définie pour $|\tau| \geq R$, et vérifiant les inégalités

$$\left| \frac{u_{i,j}^{(2)}(x)}{g_{i,j}^{(1,3)}(x)} - 1 \right| < \begin{cases} \frac{C}{|x|^{m+1}} & (|\tau| \geq R, \sigma \geq 0), \\ \frac{C}{|\tau|^{m+1}} \left| \frac{x}{\tau} \right|^d & (|\tau| \geq R), \end{cases}$$

d étant un nombre ≥ 0 .

On pourra recommencer à partir de $u_1^{(1)}(x)$ et $u_{1,i}^{(2)}(x)$ les calculs du paragraphe 70, relatifs à $u_1^{(1)}(x)$ et $u_{1,i}^{(1)}(x)$, et déterminer ainsi une solution $u_i^{(3)}(x)$ de (1) telle que l'on ait

$$\begin{vmatrix} u_i^{(1)}(x) & u_i^{(3)}(x) \\ u_j^{(1)}(x) & u_j^{(3)}(x) \end{vmatrix} = u_{i,j}^{(2)}(x),$$

et vérifiant les inégalités, analogues à (40), que l'on déduit de celles-ci en substituant $u_i^{(3)}$ et $g_i^{(3)}$ à $u_i^{(2)}$ et $g_i^{(2)}$.

On saura donc déterminer une troisième solution de (25), d'où l'on déduira une quatrième solution de (1), et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait obtenu n solutions.

Le raisonnement que nous venons de suivre est celui que nous avons fait au Chapitre IV. On aurait pu également raisonner sur le déterminant général

$$(42) \quad D^{(r)}(x) = \begin{vmatrix} u_1^{(1)}(x) & u_1^{(2)}(x) & \dots & u_1^{(r)}(x) \\ u_1^{(1)}(x+1) & u_1^{(2)}(x+1) & \dots & u_1^{(r)}(x+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(1)}(x+r-1) & u_1^{(2)}(x+r-1) & \dots & u_1^{(r)}(x+r-1) \end{vmatrix},$$

où l'on suppose connues les fonctions $u_1^{(1)}(x), u_1^{(2)}(x), \dots, u_1^{(r-1)}(x)$, comme nous avons fait au paragraphe 70 sur $D^{(2)}(x)$.

Il résulte enfin des relations asymptotiques que les n solutions ainsi obtenues forment un système fondamental. Nous pouvons donc énoncer le

THÉOREME. — *Étant donné un système d'équations linéaires, admettant n solutions formelles de la forme (9) satisfaisant à la condition (10), et dont l'équation caractéristique n'a aucune racine nulle, on peut déterminer un système fondamental de solutions $u_1^{(h)}(x), u_2^{(h)}(x), \dots, u_n^{(h)}(x)$ ($h=1, 2, \dots, n$), holomorphes dans le domaine $|\tau| \geq R$, et satisfaisant dans ce domaine aux inégalités*

$$(43) \quad \left| \frac{u_i^{(h)}(x)}{g_i^{(h)}(x)} - 1 \right| < \begin{cases} \frac{C}{|x|^{m+1}} & (\sigma \geq 0), \\ \frac{C}{|\tau|^{m+1}} \left| \frac{x}{\tau} \right|^d, \end{cases}$$

d étant un certain nombre non négatif.

En particulier, on a dans ce domaine, en dehors d'un angle aigu $\pi - \varepsilon < \arg x < \pi + \varepsilon$,

$$(44) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^m \left(\frac{u_i^{(h)}(x)}{g_i^{(h)}(x)} - 1 \right) = 0.$$

On formera de même, à partir des $\bar{u}_{i,j,\dots,l}(x)$, un autre système fondamental de solutions $\bar{u}_i^{(h)}(x)$, holomorphes dans le même

domaine $|\tau| \geq R$, et vérifiant les mêmes relations asymptotiques que les $u_i^{(h)}(x)$, mais, ici, à l'extérieur d'un angle aigu $-\varepsilon < \arg x < \varepsilon$, en ce qui concerne (44).

III. — LES SOLUTIONS PRINCIPALES.

72. Les solutions $u_1^{(h)}(x)$, $u_2^{(h)}(x)$, ..., $u_n^{(h)}(x)$ ($h=1, 2, \dots, n$) ne sont généralement pas holomorphes dans Γ . Pour obtenir des solutions de (1) holomorphes dans ce domaine, on appliquera sans modification la méthode exposée dans les paragraphes 52, 53, 54.

Nous connaissons déjà une solution $U_i^{(1)}(x) \equiv u_i(x)$ de cette nature, et ici encore la recherche d'une solution analogue associée aux $g_i^{(2)}(x)$ est résolue si $|a_2| = |a_1|$. En supposant $|a_2| > |a_1|$, il s'agit donc de choisir, autrement qu'au paragraphe 70, une solution $U_i^{(2)}(x)$ de (32), ou, ce qui revient au même, de choisir d'une manière convenable une nouvelle solution particulière $V_1(x)$ de (36). Or, en posant

$$(45) \quad \Delta v(x) = w_1(x) = \frac{D^{(2)}(x)}{u_1^{(1)}(x) u_1^{(1)}(x+1)},$$

$w_1(x)$ possède les propriétés asymptotiques de la fonction $w_1(x)$ du paragraphe 49. Si l'on désigne toujours par ξ_i l'argument de a_i , l'intégrale de Guichard

$$(46) \quad V_1(x) = \int_L \frac{e^{2\pi i \lambda(x-z)}}{1 - e^{2\pi i \lambda(x-z)}} \frac{\sum_{i=1}^n p_i^{(1)}(z) u_{i,1}(z)}{u_1^{(1)}(z) u_1^{(1)}(z+1)} dz,$$

où L est le même contour EFGH qu'au paragraphe 52, et où λ est le plus grand entier non supérieur à $\frac{\xi_1 - \xi_2}{2\pi}$, définit donc une solution de (45) ayant dans Γ les propriétés asymptotiques, énoncées en (51) (§ 53),

$$\left| V_1(x) \frac{g_1^{(1)}(x)}{g_1^{(2)}(x)} - 1 \right| < \frac{C}{|x|^{m+1}},$$

et cela dans tout angle $-\frac{\pi}{2} \leq \arg(x - x_0) \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$.

La fonction

$$U_i^{(2)}(x) = u_i^{(1)}(x) V_1(x)$$

et les fonctions qu'on en déduit à l'aide des équations (32) satisfont donc, dans les mêmes conditions, aux inégalités

$$\left| \frac{U_i^{(2)}(x)}{g_i^{(2)}(x)} - 1 \right| < \frac{C}{|x|^{m+1}}.$$

Ce procédé permettra de définir une deuxième solution $U_{i,j}^{(2)}(x)$ de (25), analytique dans Γ , et possédant, dans ce domaine, des propriétés asymptotiques analogues aux inégalités (27), où $g_{i,j}^{(1),2}(x)$ serait remplacé par $g_{i,j}^{(1,3)}(x)$. En remplaçant, dans (46), $u_{4,i}(z)$ par $U_{1,i}^{(2)}(z)$, on obtiendra une solution $V_2(x)$ de l'équation correspondante (45); on formera ainsi une nouvelle fonction

$$U_1^{(3)}(x) = u_1^{(1)}(x) V_2(x),$$

d'où l'on déduira la solution $U_1^{(3)}(x)$, $U_2^{(3)}(x)$, ..., $U_n^{(3)}(x)$ de (1), dont les éléments sont analytiques dans Γ , et vérifient, dans l'angle $-\frac{\pi}{2} \leq \arg(x - x_0) \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, les relations asymptotiques

$$\left| \frac{U_i^{(3)}(x)}{g_i^{(3)}(x)} - 1 \right| < \frac{C}{|x|^{m+1}},$$

et ainsi de suite. On déduit enfin de (1) que les n solutions obtenues sont holomorphes dans tout le plan, sauf aux points $\alpha_s - \nu$. Ces résultats peuvent être résumés dans le

THÉOREME. — *Un système linéaire qui admet n solutions formelles de la forme (9) vérifiant la condition (10), et dont l'équation caractéristique a toutes ses racines a_1, a_2, \dots, a_n différentes de zéro, admet un système fondamental de solutions*

$$U_1^{(h)}(x), U_2^{(h)}(x), \dots, U_n^{(h)}(x) \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

analytiques dans tout le plan sauf aux points $\alpha_s - \nu$ et satisfaisant, quelque grand que soit m , aux relations asymptotiques

$$(47) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^m \left(\frac{U_i^{(h)}(x)}{g_i^{(h)}(x)} - 1 \right) = 0,$$

dans tout angle $-\frac{\pi}{2} \leq \arg x \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, ε étant un nombre positif arbitrairement petit, qui peut être réduit à zéro si les a_i sont sur n rayons vecteurs différents.

En prenant $\lambda = -1$ au lieu de $\lambda = 0$, lorsque deux a_i sont sur un même rayon vecteur, on obtiendrait des solutions où la restriction représentée par ε s'appliquerait au demi-plan inférieur au lieu du demi-plan supérieur.

Enfin, on démontrerait de la même manière l'existence de n solutions

$$\overline{U}_1^h(x), \overline{U}_2^h(x), \dots, \overline{U}_n^h(x) \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

analytiques dans tout le plan sauf aux points $\gamma_s + 1 + \nu$, et satisfaisant aux relations asymptotiques (47) dans toute région de Γ limitée arbitrairement à droite, avec une restriction analogue si plusieurs des a_i sont sur un même rayon vecteur.

73. Dans son Mémoire, G. D. Birkhoff construit ces solutions principales à l'aide de l'équation aux différences (42), et montre ainsi directement que les solutions $u_i^{(h)}(x)$ et $U_i^{(h)}(x)$ qu'il obtient sont associées aux déterminants limites, c'est-à-dire telles que les déterminants de degré r formés avec les éléments des r premières colonnes ($r = 1, 2, \dots, n$) des matrices $u(x)$ et $U(x)$ soient égaux à $\widehat{u}_{i,j,\dots,l}(x)$. Avec notre raisonnement, ce résultat n'apparaît que pour $r = 2$. Mais sa vérification est immédiate, à l'aide des relations asymptotiques. En effet, les déterminants

$$\begin{vmatrix} U_i^{(1)}(x) & U_i^{(2)}(x) & \dots & U_i^{(r)}(x) \\ U_j^{(1)}(x) & U_j^{(2)}(x) & \dots & U_j^{(r)}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_l^{(1)}(x) & U_l^{(2)}(x) & \dots & U_l^{(r)}(x) \end{vmatrix}$$

sont solutions du même système

$$(48) \quad u(x+1) = P_i(x) u(x)$$

que les $u_{i,j,\dots,l}(x)$, et vérifient également, d'après (47), les premières relations asymptotiques (28). On en déduit que les différences de ces déterminants et des $u_{i,j,\dots,l}(x)$ sont telles que

$$\left| \begin{vmatrix} U_i^{(1)}(x) & \dots & U_i^{(r)}(x) \\ U_j^{(1)}(x) & \dots & U_j^{(r)}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ U_l^{(1)}(x) & \dots & U_l^{(r)}(x) \end{vmatrix} - \widehat{u}_{i,j,\dots,l}(x) \right| < G |(a_1 a_2 \dots a_r)^x x^{\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_r - m - 1}|,$$

quelque grand que soit m . Ces différences, qui forment également

une solution de (8) holomorphe dans Γ , doivent donc être nulles, car $a_1 a_2 \dots a_r$ est la plus petite valeur absolue des racines de l'équation caractéristique de ce système.

L'auteur montre également que les coefficients périodiques $\pi_{i,j}(x)$ des relations qui lient les deux systèmes de solutions principales sont rationnels en $e^{2\pi i x}$, résultat analogue à celui que nous avons obtenu au Chapitre III. Il démontre que les constantes α_i , ρ_i , et celles qui entrent dans les $\pi_{i,j}(x)$, caractérisent les propriétés essentielles des solutions d'un système d'équations linéaires aux différences, à coefficients rationnels.

Dans un Mémoire postérieur ⁽¹⁾, le même auteur a résolu le problème général de Riemann relativement à ces systèmes d'équations aux différences : Construire un système d'équations linéaires aux différences de la forme (1) admettant deux systèmes de solutions principales $U_i^h(x)$ et $\bar{U}_i^h(x)$ pour lesquelles les α_i , ρ_i et les $\pi_{i,j}(x)$ soient donnés.

K. P. Williams ⁽²⁾ a étudié un système d'équations linéaires non homogènes de la forme (26) (Chap. V), où les coefficients et le second membre sont des fonctions rationnelles. Il démontre l'existence de deux solutions principales et il met en évidence les propriétés asymptotiques de ces solutions.

Plus récemment, J. Horn a ramené, par la transformation de Laplace, l'étude des systèmes à coefficients holomorphes à l'infini à celle de systèmes d'équations intégrales de Volterra ⁽³⁾.

L'étude des systèmes (1), dont les coefficients $p_i^{(j)}(x)$ admettent des développements en série de facultés a été faite par S. Stadler ⁽⁴⁾.

Cet auteur généralise les résultats que nous avons exposés au Chapitre II, et montre, en particulier, l'existence de solutions de la forme

$$u_i(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{\nu}^{(i)} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \rho + \nu)} \quad (\text{voir page 29}).$$

⁽¹⁾ *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, vol. XLIX, n° 9, 1913, p. 521-568.

⁽²⁾ *Transactions of the American Math. Society*, vol. XIV, 1913, p. 209-240. Cf. aussi J. HORN, *Journal für die reine und angew. Math.*, t. CXLVI, 1915, p. 105.

⁽³⁾ *Jahresb. d. deutschen Mathematiker Vereinigung*, t. 24, 1915, p. 210-225.

⁽⁴⁾ *Sur les systèmes d'équations aux différences finies linéaires et homogènes* (Thèse, Lund, 1918).

Signalons encore que A. Uhler ⁽¹⁾ et P. J. Myrberg ⁽²⁾ ont étudié les systèmes de la forme (1), mais où la substitution $(z, z + 1)$ est remplacée par les substitutions d'un groupe fuchsien. Les solutions de ces systèmes d'équations sont donc une généralisation de nos solutions et des fonctions zétafuchsiennes de Poincaré.

(1) *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, Bd 19 A, 1926, n° 28.

(2) *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ*, série A, t. XXIV, 1924, n° 3.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
PRÉFACE.....	I
CHAPITRE I. — <i>Propriétés générales des équations linéaires</i>	1
I. Existence des solutions.....	1
II. Équation adjointe.....	14
III. Équations à second membre.....	22
IV. Abaissement de l'ordre d'une équation.....	26
CHAPITRE II. — <i>Résolution des équations linéaires par des séries de facultés</i>	28
I. Formation d'un système fondamental de solutions.....	28
II. Propriétés asymptotiques.....	45
III. Relations linéaires entre les deux systèmes canoniques de solutions...	49
CHAPITRE III. — <i>Application de la transformation de Laplace aux équations linéaires dont les coefficients sont des polynômes</i>	57
I. Formation de deux systèmes de solutions canoniques.....	57
II. Développement en série de facultés.....	61
III. Les relations linéaires entre les deux systèmes canoniques.....	70
IV. Détermination directe des coefficients périodiques des relations linéaires.	75
V. Propriétés asymptotiques des solutions.....	83
CHAPITRE IV. — <i>Résolution d'une équation linéaire par approximations successives</i>	89
I. Formation des solutions qui croissent le moins rapidement.....	89
II. Systèmes de solutions accessoires.....	97
III. Systèmes de solutions principales.....	105
CHAPITRE V. — <i>Propriétés générales des systèmes d'équations linéaires</i>	112
I. Existence d'une solution.....	112
II. Système adjoint.....	120
III. Systèmes à second membre.....	125
IV. Abaissement de l'ordre d'un système.....	127
CHAPITRE VI. — <i>Méthode de Birkhoff</i>	130
I. Formation d'une solution.....	130
II. Les solutions accessoires.....	140
III. Les solutions principales.....	148

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}

82544-28 Quai des Grands-Augustins, 55.

UNIVERSITY OF ROCHESTER LIBRARIES



3 9087 00070725 9

295696

PHYSICS-MATH.
LIBRARY

QA

431

Nörlund, ~~N. A.~~

N762

AUTHOR

Leçons sur les équations

TITLE

linéaires aux différences

295696

PHYSICS-MATH.
LIBRARY

QA

431

N762



W9-CID-365

